

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Санкт-Петербург
2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра радиотехники

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Институт радиоэлектроники

Специальность
210302.65 – радиотехника

Направление подготовки бакалавра
210300.62 - радиотехника

Санкт-Петербург
Издательство СЗТУ
2010

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 621.396.6:681.3

Радиотехнические цепи и сигналы: учебно-методический комплекс / сост.: С.И. Малинин, В.С. Токарев. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2010. – 224 с.

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

В дисциплине рассматриваются теория сигналов, их преобразования в технических цепях, а также основные принципы построения различных электронных устройств.

Рассмотрено на заседании кафедры радиотехники 05.11.2009; одобрено методической комиссией Института радиоэлектроники 12.11.2009.

Рецензенты: кафедра радиотехники СЗТУ (зав. кафедрой Л.Я. Родос, канд. техн. наук, проф.); В.Д. Лиференко, д-р техн. наук, проф. кафедры промышленной электроники СЗТУ.

Составители: С.И. Малинин, канд. техн. наук, доц.,
В.С. Токарев, канд. техн. наук, доц.

1. Информация о дисциплине

1.1. Предисловие

Дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы» относится к циклу ОПД.Ф.07, изучается студентами специальности 210302.65 всех форм обучения в двух семестрах. Дисциплина включает в себя разделы: детерминированные радиотехнические сигналы; модулированные сигналы; случайные сигналы и их вероятностные характеристики; частотные и временные характеристики линейных цепей; методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи; согласованная фильтрация детерминированного сигнала; оптимальная фильтрация случайного сигнала; дискретная фильтрация сигналов; метод Z – преобразования, характеристики и формы реализации дискретных фильтров; дискретное преобразование Фурье; основы синтеза дискретных фильтров; нелинейные цепи и преобразования ими радиосигналов; формирование и демодуляция радиосигналов; преобразование частоты; принципы работы автогенераторов гармонических колебаний.

Целью изучения дисциплины является вооружить студентов знаниями в области синтеза и анализа различных радиотехнических цепей и освоения принципов обеспечения помехоустойчивости при передаче, приёме и воспроизведении сигналов.

Задачи изучения дисциплины – изучение принципов генерации, усиления, излучения и приёма электромагнитных волн, относящихся к радиодиапазону; практическое использование этих волн для целей передачи, хранения и преобразования информации.

В результате изучения дисциплины студент должен овладеть знаниями по дисциплине, формируемыми на нескольких уровнях.

Иметь представление:

- о целях применения основных положений теории радиотехнических цепей и сигналов;
- об областях применения и перспективах развития теории и практики синтеза и анализа цепей и преобразования сигналов.

Знать:

- характеристики детерминированных и случайных сигналов;
- прохождение детерминированных и случайных сигналов через линейные и нелинейные цепи;
- методы преобразования аналоговых и дискретных сигналов.

Уметь:

- устанавливать взаимосвязь между структурой сигнала, механизмом его воздействия на радиотехническую цепь и математической моделью.

Получить навыки:

- применять методы для синтеза и анализа оптимальных аналоговых и цифровых фильтров;
- оценки выбора схемотехнического решения реализации различных функциональных узлов.

Место дисциплины в учебном процессе

Теоретической и практической основами дисциплины являются курсы “Математика”, “Физика”, “Информатика”, “Основы теории цепей”. Приобретенные студентами знания могут быть непосредственно использованы при изучении дисциплин “Схемотехника аналоговых электронных устройств”, “Радиоавтоматика”, “Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоустройств”, “Основы приема и обработки сигналов”, а также в курсовом и дипломном проектировании.

1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы

1.2.1. Содержание дисциплины по ГОС

Детерминированные радиотехнические сигналы, их спектральные и корреляционные характеристики; модулированные сигналы, их временное и спектральное представление; разновидности модулированных сигналов; случайные сигналы и их вероятностные характеристики; корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов; частотные и временные характеристики линейных цепей; методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи; преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи; условия устойчивости линейной цепи; согласованная фильтрация детерминированного сигнала; оптимальная фильтрация случайного сигнала; дискретная фильтрация сигналов; метод Z – преобразования, характеристики и формы реализации дискретных фильтров; дискретное преобразование Фурье; основы синтеза дискретных фильтров; нелинейные цепи и преобразования ими радиосигналов; формирование и демодуляция радиосигналов; преобразование частоты; принципы работы автогенераторов гармонических колебаний.

1.2.2. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов		
	Форма обучения		
	Очная	Очно-заочная	Заочная
Общая трудоемкость дисциплины (ОТД)	270		
Работа под руководством преподавателя (РпРП) (включая ДОТ)	162	162	162
в т.ч. аудиторные занятия:			
лекции	100	20	12
практические занятия (ПЗ)	18	8	4
лабораторные работы (ЛР)	44	20	16
Самостоятельная работа студента (СРС)	108	108	108

Промежуточный контроль, количество	13	14	14
в т. ч.: курсовая работа (проект)	1	1	1
контрольная работа	-	1	1
Вид промежуточной аттестации	Зачет, экзамен		

1.2.3. Перечень видов практических занятий и контроля

- практические занятия, лабораторные работы;
- тесты (тренировочные и контрольные);
- контрольная работа (для очно-заочной и заочной форм обучения);
- курсовая работа;
- зачет;
- экзамен.

2. Рабочие учебные материалы

2.1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА (270 часов)

Введение (4 часа)

[1], с. 5 – 16

Задачи радиотехники: изучение принципов генерации, усиления, излучения и приёма электромагнитных волн, относящихся к радиодиапазону; практическое использование этих волн для целей передачи, хранения и преобразования информации.

Основные области применения радиотехники: связь, навигация, телевидение, радиолокация, космические исследования и др.

Раздел 1

Детерминированные радиотехнические сигналы (28 часов)

[1], с. 16 – 72; [2], с. 40 – 97

1.1. Элементы обобщенной теории сигналов (4 часа)

Модели наиболее распространённых сигналов. Представление произвольного сигнала посредством суммы элементарных колебаний.

Геометрическое представление сигналов. Пространство сигналов.

Элементы обобщённой спектральной теории сигналов. Обобщённый ряд Фурье. Ортогональная и ортонормированная системы базисных функций. Равенство Парсеваля. Погрешность аппроксимации колебания рядом Фурье. Неравенство Бесселя. Краткий обзор наиболее распространённых систем базисных функций.

1.2. Спектральные характеристики сигналов (12 часов)

Гармонический анализ периодических сигналов. Спектр периодического колебания. Примеры спектров. Распределение мощности в спектре периодического колебания.

Гармонический анализ непериодических сигналов. Свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах). Спектры некоторых распространённых сигналов: видеоимпульс прямоугольной формы, экспоненциальный импульс, колоколообразный импульс.

Распространение понятия спектральная плотность на гармоническое и на сложное периодическое колебания. Связь между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности импульсов.

Соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра.

1.3. Дискретизация сигналов. Теорема отсчетов (6 часов)

Представление сигнала с ограниченной полосой частот Котельникова. Теорема отсчётов в частотной области. Дискретизированные сигналы.

1.4. Корреляционные характеристики сигналов (6 часов)

Корреляционный анализ детерминированных сигналов. Примеры корреляционных функций.

Соотношение между корреляционной функцией и спектральной характеристикой сигнала. Когерентные колебания.

Раздел 2

Модулированные сигналы (20 часов)

[1], с. 72 – 104; [2], с. 103 – 146

2.1. Временное и спектральное представления сигналов с амплитудной модуляцией (8 часов)

Виды модуляции: амплитудная, угловая (частотная и фазовая), кодовая.

Колебания с амплитудной модуляцией. Спектр АМ-колебаний. Векторное представление АМ-колебаний. Мощность АМ-колебаний.

2.2. Временное и спектральное представления сигналов с угловой модуляцией (8 часов)

Колебания с угловой модуляцией. Фаза и мгновенная частота колебаний. Колебания с частотной или фазовой модуляциями. Спектр колебаний при гармонической угловой модуляции.

2.3. Разновидности модулированных сигналов (4 часа)

Спектр радиоимпульса с частотно-модулированным заполнением.

Фазоимпульсная модуляция. Требования к спектрам модулированных колебаний, обусловленные проблемой электромагнитной совместимости.

Огибающая, фаза и частота узкополосного сигнала. Аналитический сигнал.

Корреляционная функция модулированного колебания. Особенности корреляционной функции колебания с большой базой (сжатие сигнала).

Дискретизация (по Котельникову) узкополосного сигнала.

Раздел 3

Случайные сигналы (20 часов)

[1], с. 109 – 142; [2], с. 166 – 181

3.1. Случайные сигналы и их вероятностные характеристики (12 часов)

Общие определения случайных сигналов: реализация, плотность вероятности, параметры случайного процесса, корреляционная функция, стационарность случайного процесса. Эргодическое свойство.

Радиотехническая интерпретация таких понятий, как математическое ожидание, среднее значение, дисперсия. Примеры случайных процессов. Нормальный случайный процесс.

3.2. Корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов (8 часов)

Спектральная плотность мощности случайного процесса. Связь между спектральной и корреляционной характеристиками. Теорема Винера–Хинчина. Модель случайного процесса в виде белого шума.

Узкополосные случайные процессы: статистические характеристики сигнала (процесса) и его огибающей, понятие о свойствах фазы и частоты узкополосного процесса. Значение статистического подхода в радиоэлектронике.

Раздел 4

Линейные цепи (20 часов)
[1], с. 174 – 202; [2], с. 225 – 283

4.1. Частотные и временные характеристики линейных цепей (10 часов)

Спектральный метод. Метод интеграла наложения.

4.2. Методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи (10 часов)

Прохождение дискретных сигналов через апериодические цепи: прохождение прямоугольных импульсов, дифференцирование и интегрирование сигналов и др.

Анализ радиосигналов в избирательных цепях. Метод огибающей: спектральный подход, временной подход. Прохождение радиоимпульсов через избирательные цепи. Линейные искажения амплитудно-модулированного колебания в резонансном усилителе. Прохождение частотно-модулированных колебаний через избирательные цепи. Прохождение фазо- и частотно- модулированных колебаний через резонансную цепь.

Раздел 5

Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи (20 часов)

[1], с. 202 – 220; [2], с. 299 – 310

5.1. Спектральная характеристика мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи (12 часов)

Преобразования характеристик случайного процесса на выходе линейной цепи. Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи.

5.2. Нормирование случайных процессов в узкополосных линейных цепях (8 часов)

Характеристики собственных шумов в радиоэлектронных цепях. Дифференцирование и интегрирование случайных сигналов. Нормализация случайных процессов в узкополосных линейных цепях.

Раздел 6

Аналоговая фильтрация сигналов (22 часа)

[1], с. 396 – 423; [2], с. 505 – 521

6.1. Согласованная фильтрация детерминированного сигнала (8 часов)

Понятие об оптимальном выделении сигнала известной формы из аддитивной смеси сигнала и стационарного нормального шума. Фильтр, максимизирующий отношение сигнал/помеха (согласованный фильтр) при белом шуме. Передаточная функция.

6.2. Оптимальная фильтрация случайного сигнала (14 часов)

Импульсная характеристика согласованного фильтра. Примеры построения фильтров для наиболее распространённых импульсных сигналов.

Формирование сигнала, сопряжённого с заданным фильтром. Фильтрация заданного сигнала при небелом шуме.

Раздел 7

Нелинейные цепи (28 часов)

[1], с. 220 – 270; [2], с. 323 – 347

7.1. Преобразования радиосигналов в нелинейных цепях (8 часов)

Резистивные и энергоёмкие нелинейные элементы и их параметры. Различные методы аппроксимации характеристик нелинейных элементов.

Преобразование спектра колебаний в цепи с резистивным нелинейным элементом. Преобразование спектра при воздействии на цепь с нелинейным элементом одного гармонического колебания. Преобразование спектра при воздействии на цепь с нелинейным элементом двух гармонических колебаний. Комбинационные частоты.

7.2. Формирование и демодуляция радиосигналов. Преобразование частоты (20 часов)

Основные нелинейные преобразования сигналов: нелинейное резонансное усиление, умножение частоты, детектирование АМ-колебаний. Понятие о детектировании ЧМ- и ФМ-колебаний. Преобразование частоты сигнала. Синхронное детектирование. Получение АМ-колебаний.

Примеры схемотехнических решений (в том числе в дискретном исполнении и на типовых ИС).

Раздел 8

Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний (22 часа)
[1], с. 270 – 306; [2], с. 421 – 449

8.1. Автоколебательная система (6 часов)

Определение автоколебательной системы. Основные принципы реализации высокочастотных автогенераторов.

8.2. Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний (8 часов)

Возникновение колебаний в LC-автогенераторе. Стационарный режим автогенератора. Баланс амплитуд, баланс фаз. Квазилинейная теория автогенератора. Мягкий и жёсткий режимы самовозбуждения.

8.3. Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации (8 часов)

Нелинейное уравнение LC-автогенератора. Решение нелинейного уравнения методом медленно меняющихся амплитуд.

Автогенератор при внешнем гармоническом воздействии: регенерация и явление захватывания частоты.

Модуляция частоты в автогенераторе.

Примеры схем автогенераторов (на лампах, на транзисторах, на интегральных схемах; автогенераторы кварцевые и с отрицательным сопротивлением), RC-генераторы.

Раздел 9

Параметрические цепи (22 часа)
[1], с. 306 – 329; [2], с. 356 – 383

9.1. Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи (10 часов)

Параметрические элементы. Основные свойства параметрических цепей. Передаточная функция и импульсная характеристика линейной параметрической цепи. Прохождение детерминированных сигналов через параметрические цепи.

9.2. Параметрический резонанс (12 часов)

Принцип параметрического усиления колебаний, одноконтурный усилитель. Параметрическое возбуждение колебаний, дифференциальное уравнение контура с параметрической реактивностью. Параметрические генераторы.

Раздел 10

Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи (20 часов) [1], с. 329 – 351

10.1. Преобразование нормального процесса в безынерционных нелинейных цепях (8 часов)

Преобразование закона распределения и энергетического спектра случайного процесса в безынерционной линейной цепи. Воздействие нормального узкополосного шума на амплитудный и частотный детекторы.

10.2. Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный и частотный детекторы (12 часов)

Совместное действие гармонического сигнала и нормального шума на амплитудный и частотный детекторы.

Взаимодействие сигнала и нормального шума в амплитудном ограничителе с резонансной нагрузкой.

Преобразования случайных процессов в линейных цепях с переменными параметрами.

Раздел 11

Дискретная фильтрация сигналов (20 часов) [1], с. 351 – 396; [2], с. 463 – 494

11.1. Характеристики и формы реализации дискретных фильтров (10 часов)

Преимущества цифровых систем и устройств. Роль цифровых методов обработки сигналов в ускорении прогресса радиотехники.

Структурная схема цифровой фильтрации. Алгоритм дискретной свёртки. Импульсная характеристика и передаточная функция цифрового фильтра трансверсального типа и рекурсивного фильтра.

Каноническая форма цифровой фильтрации.

11.2. Использование дискретного преобразования Фурье и метода Z-преобразования в анализе дискретных фильтров (10 часов)

Применение метода Z-преобразования к аналоговым сигналам, Z-преобразование передаточной функции дискретной цепи. Примеры анализа циф-

ровых фильтров на основе метода Z -преобразования. Преобразование аналог – цифра и шумы квантования. Понятие о шумах округления, связанных с ограничением длины кодового слова в арифметических устройствах ЦФ.

Оценка быстродействия арифметического устройства ЦФ. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Раздел 12

Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров (24 часа)

[1], с. 444 – 468; [2], с. 392 – 414

Синтез аналоговых четырёхполосников по заданному модулю передаточной функции. Основные этапы синтеза. Фильтры Баттерворта и Чебышева. Эллиптический фильтр. Синтез фильтров на основе взаимно независимых звеньев типа активных RC -цепей в микроэлектронном исполнении.

Синтез цифровых фильтров по заданному аналоговому прототипу на основе билинейного Z -преобразования.

Синтез цепей по заданной импульсной характеристике, ориентированной на решение задачи согласованной фильтрации. Преимущества цифровой фильтрации, обусловленные простотой осуществления весовой обработки. Методы синтеза, основанные на инвариантности импульсной или амплитудно-частотной характеристик цифровых и аналоговых цепей.

2.2. Тематический план дисциплины

2.2.1. Тематический план дисциплины для студентов очно-заочной формы обучения

№ п/п	Наименования разделов и тем	Количество часов по очной форме обучения	Виды занятий (часы)						I Виды контроля					
			Лекции		ПЗ (С)		ЛР		Самостоятельная работа	Тесты	Контрольные работы	ПЗ	ЛР	Курсовая работа
			аудит.	ДОТ	аудит.	ДОТ	аудит.	ДОТ						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	ВСЕГО	270	20	100	8	6	20	8	108		1			1
	Введение	4	2	-	-	-	-	-	2					
1	Раздел 1. Детерминированные радиотехнические сигналы	28	4	9	3	4	4	1	3	№ 1				
1.1	Элементы обобщенной теории сигналов	4	1	3	-	-	-	-	-					
1.2	Спектральные характеристики сигналов	12	1	1	2	2	4	1	1		№ 1	№ 1	№ 1	
1.3	Дискретизация сигналов. Теорема отсчетов	6	1	4	-	-	-	-	1					

1.4	Корреляционные характеристики сигналов	6	1	1	1	2	-	-	1		№ 1	№ 2		
2	Раздел 2. Модулированные сигналы	20	2	8	1	2	-	-	7	№ 2				
2.1	Временное и спектральное представление сигналов с амплитудной модуляцией	8	1	2	1	2	-	-	2		№ 1	№ 3		
2.2	Временное и спектральное представление сигналов с угловой модуляцией	8	1	4	-	-	-	-	3					
2.3	Разновидности модулированных сигналов	4	-	2	-	-	-	-	2					
3	Раздел 3. Случайные сигналы	20	2	6	-	-	-	-	12	№ 3				
3.1	Случайные сигналы и их вероятностные характеристики	12	1	3	-	-	-	-	8					
3.2	Корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов	8	1	3	-	-	-	-	4					
4	Раздел 4. Линейные цепи	20	2	7	-	-	8	3	-	№ 4				
4.1	Частотные и временные характеристики линейных цепей	10	1	4	-		4	1					№ 2	
4.2	Методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи	10	1	3	-		4	2					№ 5,6	
5	Раздел 5. Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи	20	-	4	-	-	-	-	16	№ 5				
5.1	Спектральная характеристика мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи	12	-	2	-	-	-	-	10					
5.2	Нормирование случайных процессов в узкополосных линейных цепях	8	-	2	-	-	-	-	6					

6	Раздел 6. Аналоговая фильтрация сигналов	22	-	6	-	-	-	-	16	№ 6				
6.1.	Согласованная фильтрация детерминированного сигнала	8	-	2	-	-	-	-	6					
6.2	Оптимальная фильтрация случайного сигнала	14	-	4	-	-	-	-	10					
7	Раздел 7. Нелинейные цепи	28	4	15	-	-	6	3	-	№ 7				
7.1	Преобразования радиосигналов в нелинейных цепях	8	2	3	-	-	2	1	-				№ 9	
7.2	Формирование и демодуляция радиосигналов. Преобразование частоты	20	2	12	-	-	4	2	-				№ 10, 11	
8	Раздел 8. Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	22	2	10	-	-	2	1	7	№ 8				
8.1	Автоколебательная система	6	1	4	-	-	-	-	1					
8.2	Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний	8	1	4	-	-	2	1	-				№ 12	
8.3	Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации	8	-	2	-	-	-	-	6					
9	Раздел 9. Параметрические цепи	22	-	6	-	-	-	-	16	№ 9				
9.1	Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи	10	-	2	-	-	-	-	8					
9.2	Параметрический резонанс	12	-	4	-	-	-	-	8					
10	Раздел 10. Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи	20	-	9	-	-	-	-	11	№ 10				
10.1	Преобразование нормального процесса в безынерционных нелинейных цепях	8	-	4	-	-	-	-	4					

10.2	Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный и частотный детекторы	12	-	5	-	-	-	-	7					
11	Раздел 11. Дискретная фильтрация сигналов	20	-	2	-	-	-	-	18	№ 11				
11.1	Характеристики и формы реализации дискретных фильтров	10	-	1	-	-	-	-	9					
11.2	Использование дискретного преобразования Фурье и метода Z-преобразования в анализе дискретных фильтров	10	-	1	-	-	-	-	9					
12	Раздел 12. Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	24	2	18	4	-	-	-	-	№ 12		№ 4		

2.2 2. Тематический план дисциплины для студентов заочной формы обучения

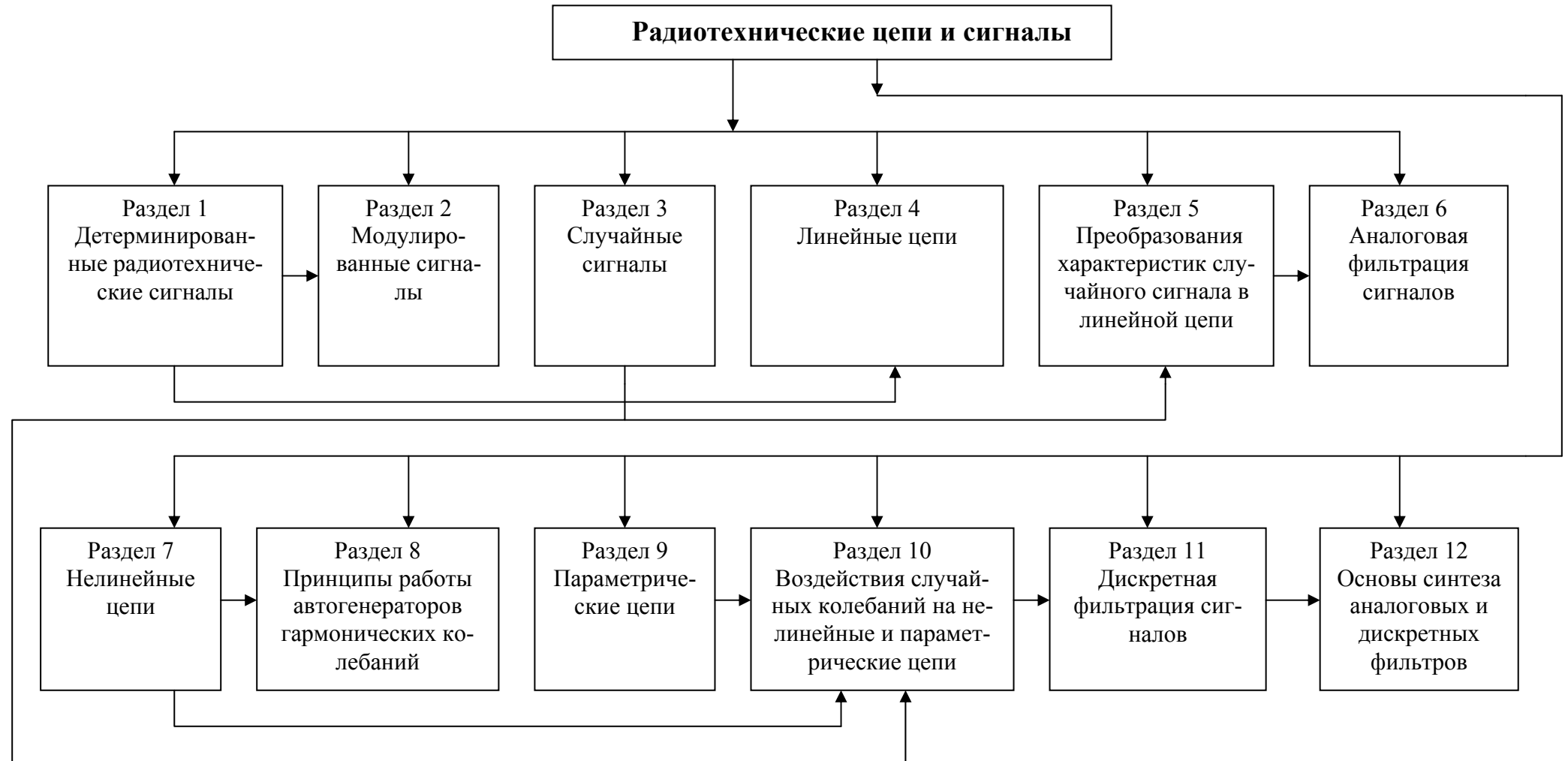
№ п/п	Наименования разделов и тем	Количество часов по очной форме обучения	Виды занятий (часы)							I Виды контроля				
			Лекции		ПЗ (С)		ЛР		Самостоятельная работа	Тесты	Контрольные работы	ПЗ	ЛР	Курсовая работа
			аудит.	ДОТ	аудит.	ДОТ	аудит.	ДОТ						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	ВСЕГО	270	12	122	4	4	16	4	108		1			1
	Введение	4	1	-	-	-	-	-	3					
1	Раздел 1. Детерминированные радиотехнические сигналы	28	2	18	-	3	2	1	2	№ 1				
1.1	Элементы обобщенной теории сигналов	4	-	2	-	-	-	-	2					
1.2	Спектральные характеристики сигналов	12	1	6	-	2	2	1	-		№1	№ 1	№ 1	
1.3	Дискретизация сигналов. Теорема отсчетов	6	-	6	-	-	-	-	-					
1.4	Корреляционные характеристики сигналов	6	1	4	-	1	-	-	-		№1	№ 2		

2	Раздел 2. Модулированные сигналы	20	2	17	-	1	-	-	-	№2				
2.1	Временное и спектральное представление сигналов с амплитудной модуляцией	8	1	6	-	1	-	-	-		№1	№3		
2.2	Временное и спектральное представление сигналов с угловой модуляцией	8	1	7	-	-	-	-	-					
2.3	Разновидности модулированных сигналов	4	-	4	-	-	-	-	-					
3	Раздел 3. Случайные сигналы	20	-	2	-	-	-	-	18	№3				
3.1	Случайные сигналы и их вероятностные характеристики	12	-	1	-	-	-	-	11					
3.2	Корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов	8	-	1	-	-	-	-	7					
4	Раздел 4. Линейные цепи	20	1	10	-	-	6	3	-	№4				
4.1	Частотные и временные характеристики линейных цепей	10	1	6			2	1					№2	
4.2	Методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи	10	-	4			4	2					№5,6	
5	Раздел 5. Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи	20	-	6	-	-	-	-	14	№5				
5.1	Спектральная характеристика мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи	12	-	5	-	-	-	-	7					
5.2	Нормирование случайных процессов в узкополосных линейных цепях	8	-	1	-	-	-	-	7					

6	Раздел 6. Аналоговая фильтрация сигналов	22	-	7	-	-	-	-	15	№ 6				
6.1	Согласованная фильтрация детерминированного сигнала	8	-	1	-	-	-	-	7					
6.2	Оптимальная фильтрация случайного сигнала	14	-	6	-	-	-	-	8					
7	Раздел 7. Нелинейные цепи	28	2	19	-	-	6	-	1	№ 7				
7.1	Преобразования радиосигналов в нелинейных цепях	8	1	5	-	-	2	-	-				№ 9	
7.2	Формирование и демодуляция радиосигналов. Преобразование частоты	20	1	14	-	-	4	-	1				№ 10, 11	
8	Раздел 8. Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	22	2	17	-	-	2	-	1	№ 8				
8.1	Автоколебательная система	6	1	5	-	-	-	-	-					
8.2	Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний	8	1	5	-	-	2	-	-				№ 12	
8.3	Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации	8	-	7	-	-	-	-	1					
9	Раздел 9. Параметрические цепи	22	-	-	-	-	-	-	22	№ 9				
9.1	Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи	10	-	-	-	-	-	-	10					
9.2	Параметрический резонанс	12	-	-	-	-	-	-	12					
10	Раздел 10. Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи	20	-	11	-	-	-	-	9	№ 10				
10.1	Преобразование нормального процесса в безынерционных нелинейных цепях	8	-	4	-	-	-	-	4					

10.2	Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный и частотный детекторы	12	-	7	-	-	-	-	5					
11	Раздел 11. Дискретная фильтрация сигналов	20	-	-	-	-	-	-	20	№ 11				
11.1	Характеристики и формы реализации дискретных фильтров	10	-	-	-	-	-	-	10					
11.2	Использование дискретного преобразования Фурье и метода Z-преобразования в анализе дискретных фильтров	10	-	-	-	-	-	-	10					
12	Раздел 12. Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	24	2	15	4	-	-	-	3	№ 12		№ 4		

2.3. Структурно-логическая схема дисциплины «Радиотехнические цепи и сигналы»



2.4. Временной график изучения дисциплины

№	Наименования раздела (темы) и вида учебной работы студента	Продолжительность изучения раздела (темы) (из расчета – 4 часа в день)
Часть 1		
1	Введение	1 день
2	Раздел 1. Детерминированные радиотехнические сигналы	7 дней
3	Раздел 2. Модулированные сигналы	5 дней
4	Раздел 3. Случайные сигналы	5 дней
5	Раздел 4. Линейные цепи	5 дней
6	Раздел 5. Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи	5 дней
7	Раздел 6. Аналоговая фильтрация сигналов	5,5 дней
	В том числе: К/Р	2 дня
	ИТОГО Ч. 1	33,5 дня
Часть 2		
8	Раздел 7. Нелинейные цепи	7 дней
9	Раздел 8. Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	5,5 дней
10	Раздел 9. Параметрические цепи	5,5 дней
11	Раздел 10. Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи	5 дней
12	Раздел 11. Дискретная фильтрация сигналов	5 дней
13	Раздел 12. Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	6 дней
	В том числе: КР	8 дней
	ИТОГО Ч. 2	34 дня
	ИТОГО	67,5 дней

2.5. Практический блок

2.5.1. Практические занятия

2.5.1.1. Практические занятия (очно-заочная форма обучения)

Номер и наименование раздела	Наименования тем практических занятий	Количество часов	
		Ауд.	ДОТ
Часть 1			
Раздел 1	ПЗ № 1		
Детерминированные радиотехнические сигналы	Определение спектральной плотности для различных сигналов	2	2

Раздел 1 Детерминированные радиотехнические сигналы	ПЗ № 2 Определение корреляционных функций для детерминированных сигналов	1	2
Раздел 2 Модулированные сигналы	ПЗ № 3 Определение параметров АМ- сигналов	1	2
ИТОГО Ч.1		4	6
Часть 2			
Раздел 12 Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	ПЗ № 4 Синтезирование фильтров низкой частоты с помощью активных цепей	4	-
ИТОГО Ч.2		4	-
ИТОГО		8	6

2.5.1.2. Практические занятия (заочная форма обучения)

Номер и наименование раздела	Наименования тем практических занятий	Количество часов	
		Ауд.	ДОТ
Часть 1			
Раздел 1 Детерминированные радиотехнические сигналы	ПЗ № 1 Определение спектральной плотности для различных сигналов	-	2
Раздел 1 Детерминированные радиотехнические сигналы	ПЗ № 2 Определение корреляционных функций для детерминированных сигналов	-	1
Раздел 2 Модулированные сигналы	ПЗ № 3 Определение параметров АМ- сигналов	-	1
ИТОГО Ч.1		-	4
Часть 2			
Раздел 12 Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	ПЗ № 4 Синтезирование фильтров низкой частоты с помощью активных цепей	4	-
ИТОГО Ч.2		4	-
ИТОГО		4	4

2.5.2. Лабораторные работы

2.5.2.1. Лабораторные работы (очно-заочная форма обучения)

Номер и наименование раздела	Наименования тем лабораторных работ	Количество часов	
		Ауд.	ДОТ
Часть 1			
Раздел 1 Детерминированные радиотехнические сигналы	ЛР № 1 Спектральный анализ периодической последовательности прямоугольных импульсов и исследование процесса ее прохождения через колебательный контур	4	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 2 Исследование дифференцирующей и интегрирующей цепей	4	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 5 Исследование прохождения амплитудно-модулированного колебания через одиночный колебательный контур	2	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 6 Исследование прохождения частотно-модулированных колебаний через колебательный контур	2	1
ИТОГО Ч.1		12	4
Часть 2			
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 9 Нелинейное резонансное усиление и умножение частоты	2	1
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 10 Амплитудная модуляция	2	1
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 11 Детектирование амплитудно-модулированного сигнала	2	1
Раздел 8 Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	ЛР № 12 Исследование автогенератора гармонических колебаний	2	1
ИТОГО Ч.2		8	4
ИТОГО		20	8

2.5.2.2. Лабораторные работы (заочная форма обучения)

Номер и наименование раздела	Наименования тем лабораторных работ	Количество часов	
		Ауд.	ДОТ
Часть 1			
Раздел 1 Детерминированные радиотехнические сигналы	ЛР № 1 Спектральный анализ периодической последовательности прямоугольных импульсов и исследование процесса ее прохождения через колебательный контур	2	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 2 Исследование дифференцирующей и интегрирующей цепей	2	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 5 Исследование прохождения амплитудно-модулированного колебания через одиночный колебательный контур	2	1
Раздел 4 Линейные цепи	ЛР № 6 Исследование прохождения частотно-модулированных колебаний через колебательный контур	2	1
ИТОГО Ч.1		8	4
Часть 2			
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 9 Нелинейное резонансное усиление и умножение частоты	2	-
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 10 Амплитудная модуляция	2	-
Раздел 7 Нелинейные цепи	ЛР № 11 Детектирование амплитудно-модулированного сигнала	2	-
Раздел 8 Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	ЛР № 12 Исследование автогенератора гармонических колебаний	2	-
ИТОГО Ч.2		8	-
ИТОГО		16	4

2.6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Складывающаяся практика применения балльно-рейтинговой системы предполагает 100-балльную шкалу.

Дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы» состоит из двух частей и рассчитана на два семестра. В первом семестре по очно-заочной форме обучения студенты делают контрольную работу, лабораторные работы, выполняют три практических задания, отвечают на вопросы контрольных тестов и сдают зачет. Для того, чтобы получить допуск к зачету, студент должен решить шесть контрольных тестов текущего контроля, каждый из которых содержит 5 вопросов. Правильный ответ оценивается 0,6 баллом. Итого за все шесть тестов максимальное количество баллов составляет 18. За каждое правильно выполненное практическое задание студент получает по 2 балла, то есть в сумме 6 баллов. За правильно выполненные лабораторные работы студент получает максимум 12 баллов. Правильно выполненная контрольная работа оценивается 14 баллами. Итого максимальное количество баллов составит $18+6+12+14=50$. Студенты, набравшие 45 баллов и выше, считаются сдавшими зачет. Студенты заочной формы обучения, для которых аудиторские практические занятия в первом семестре не предусмотрены, за выполнение практических заданий получают 6 дополнительных бонусных баллов.

Во втором семестре студенты делают лабораторные работы, выполняют одно практическое задание, выполняют курсовую работу и отвечают на вопросы контрольных тестов. За правильно выполненные лабораторные работы студент получает максимум 12 баллов, за правильно выполненное практическое задание студент получает 4 балла, за тесты – максимум 18 баллов, за хорошо выполненную курсовую работу – 16 баллов.

Итого максимальное количество баллов, которое может получить студент во втором семестре, составляет 50.

Для получения допуска к экзамену необходимо набрать (с учетом баллов, набранных в первом семестре) не менее 90 баллов. Студенты, набравшие более 95 баллов, могут претендовать на оценку “хорошо” или “отлично” в зависимости от ответов на экзамене.

3. Информационные ресурсы дисциплины

3.1. Библиографический список

Основной:

1. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник/ С.И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 2003.

Дополнительный:

2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник/ И.С. Гоноровский. – М.: Радио и связь, 1986.

3. Радиотехнические цепи и сигналы/ под ред. К.А. Самойло.– М.: Высш. шк., 1982.

4. Зиновьев, А.Л. Введение в теорию сигналов и цепей/ А.Л. Зиновьев, Л.Н. Филиппов. – М.: Высш. шк., 1975.

5. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника/ В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982.

6. Жуков, В.П. Задачник по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”/ В.П. Жуков, В.Г. Карташев, А.М. Николаев. – М.: Высш. шк., 1986.

7. Манаев, Е.И. Основы радиоэлектроники/ Е.И. Манаев. – М.: Радио и связь, 1985.

8. Каяцкас, А.А. Основы радиоэлектроники/ А.А. Каяцкас. – М.: Высш. шк., 1988.

9. Мошиц, Г. Проектирование активных фильтров/ Г. Мошиц, П. Хорн. – М.: Мир, 1984.

10. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб.-метод. комплекс, информ. ресурсы дисциплины, метод. указ. к выполнению лаб. работ, метод. указ. к проведению практич. занятий/ сост.: С.И. Малинин, В.С. Токарев.- СПб. : Изд-во СЗТУ, 2010.

3.2. Опорный конспект

Введение

Радиотехника – это область науки и техники, занимающаяся изучением и применением электромагнитных колебаний и волн радиочастотного диапазона. К радиодиапазону относят частоты ниже инфракрасного диапазона (3 ТГц, что равно 3×10^{12} Гц).

Радиотехникой решается множество задач, главная из которых – передача информации на расстояние с помощью радиоволн.

Радиоволны – это электромагнитные волны с частотами до 3 ТГц, распространяющиеся в пространстве без искусственных направляющих линий. Развитие радиотехники началось с изобретения устройства для приема электромагнитных волн (Попов, Маркони).

Радиосвязь – это связь между объектами посредством радиоволн. Радиосвязь бывает:

- односторонняя,
- двусторонняя,
- между двумя объектами,
- между несколькими объектами,
- между подвижными или неподвижными объектами

Круг применения радиотехники постоянно расширяется. В настоящее время радиотехника обеспечивает не только передачу, но и получение информации об окружающей среде. Радиотехника обеспечивает воздействие на природные или технические объекты:

- радиолокацию,
- радионавигацию,
- радиоуправление,
- радиотелеметрию и др.

Радиолокация решает задачи обнаружения и распознавания различных объектов, а также определения их координат и параметров движения с помощью радиоволн (корабли, самолеты, ракеты, сооружения на земле, облака, осадки и т. д.). Радиолокация позволяет точно измерить расстояние от Земли до Луны и других планет.

Радионавигация решает задачи управления и движения по оптимальным траекториям различных объектов. Основные задачи, решаемые радионавигацией, – определение оптимального курса и географических координат объекта.

Радиоуправление обеспечивает автоматическое управление объектами на расстоянии при помощи радиоволн, радиотехнических методов и средств. Обеспечивает движение летательных аппаратов в автоматическом режиме (искусственные спутники Земли, метеорологические зонды и т. д.).

Радиотелеметрия решает задачи измерения физических величин на рас-

стоянии, например, на труднодоступных объектах - радиозондах, спутниках земли и т. д.

Радиотехника широко применяется в медицине, радиотехнические методы и устройства широко применяются во всех областях науки и техники.

Информация – это совокупность сведений о событиях, явлениях, предметах, предназначенная для передачи, приема, хранения, использования. Все применения радиотехники связаны с передачей информации.

Для передачи информации нужно представить ее в некоторой форме. Информация, представленная в такой форме, называется **сообщением**. Бывают звуковые сообщения, текстовые сообщения и т. д.

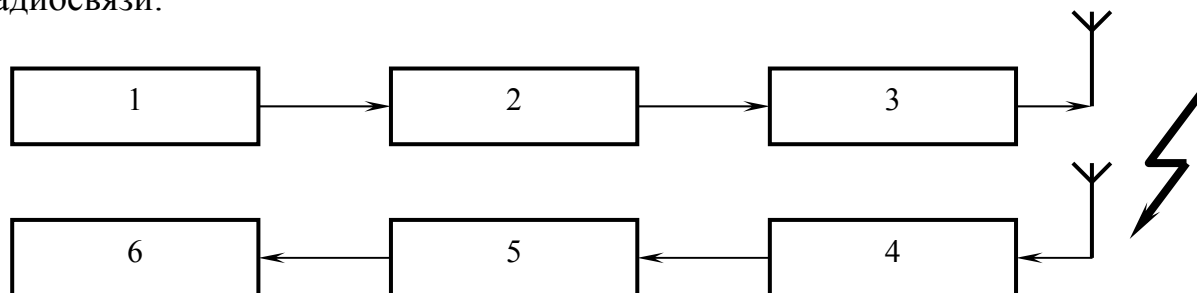
Сообщение (информация) может быть передано на расстояние с помощью определенного материального носителя. В роли носителя выступают различные сигналы.

Сигналы – это физические процессы, значения параметров которых отражают передаваемые сообщения (электрические колебания и электромагнитные колебания и волны).

Радиоканал обеспечивает передачу сообщения из одной точки в другую. Основные элементы радиоканала:

- передатчик,
- приемник,
- физическая среда, в которой распространяются радиоволны.

Процессы, обеспечивающие функционирование радиоканала на примере канала радиосвязи:



1 – Источник сообщения (человек, аудиокассета...).

2 – Преобразователь сообщения в электрический сигнал (микрофон, магнитофон...). На выходе преобразователя получают сигналы сообщения. Эти сигналы, как правило, низкочастотные, и они не используются для возбуждения радиоволн, так как размеры антенны должны быть соизмеримы с длиной волны. Для передачи информации ее модулируют. Модуляция состоит в изменении параметров высокочастотных (вторичного сигнала) колебаний в соответствии с низкочастотным (первичным) сигналом. Высокочастотный сигнал, измененный в соответствии с низкочастотным сигналом, называют модулированным сигналом.

3 – Радиопередатчик (модулятор).

Высокочастотные колебания излучаются передающей антенной. Радиоволна становится материальным носителем сообщения. Часть энергии улавливается приемной антенной.

4 – Радиоприемник. Служит для приема сигналов и преобразует их к начальному виду (процесс преобразования высокочастотного модулированного сигнала в низкочастотный сигнал называется демодулированием, или детектированием). На выходе приемника 4 возникает низкочастотный сигнал, близкий к передаваемому сигналу. Низкочастотный сигнал частично искажается помехами и т. д. Приемники конструируют таким образом, чтобы он максимально ослаблял помехи.

5 – Преобразователь электрического сигнала в сообщение.

6 – Получатель сообщения.

В основном все эти процессы связаны с различными преобразованиями сигналов. Преобразование осуществляется посредством радиотехнических цепей.

1. Детерминированные радиотехнические сигналы

1.1. Элементы обобщенной теории сигналов

1. Основные характеристики и методы анализа сигналов, используемых в радиотехнике для передачи информации.

2. Основные виды преобразований сигналов в процессе построения каналов.

3. Способы построения и методы анализа радиотехнических цепей, посредством которых выполняются операции над сигналом.

Радиотехнические сигналы можно определить как сигналы, которые используются в радиотехнике. По своему назначению радиотехнические сигналы делятся на сигналы:

- радиовещания,
- телевизионные,
- телеграфные,
- радиолокационные,
- радионавигационные,
- телеметрические и др.

Все радиотехнические сигналы модулированы. При формировании модулированных сигналов используют первичные сигналы низкой частоты (аналоговые, дискретные, цифровые).

Аналоговый сигнал повторяет закон изменения передаваемого сообщения.

Дискретный сигнал – источник сообщения передает информацию через определенные интервалы времени (например, о погоде), кроме того, дискретный источник может быть получен в результате дискретизации во времени аналогового сигнала.

Цифровой сигнал – это отображение сообщения в цифровой форме. При-

мер: текстовое сообщение кодируем в цифровой сигнал. Все знаки сообщения могут кодироваться в двоичный код, шестнадцатеричный и другие коды. Кодирование осуществляется автоматически при помощи кодера. Таким образом, символы кода преобразуются в стандартные сигналы.

Преимущество цифровой передачи данных - это высокая помехозащищенность. Обратное преобразование осуществляется при помощи цифроаналогового преобразователя.

Математические модели сигналов

При изучении общих свойств сигналов обычно отвлекаются от их физической природы и назначения, заменяя их математической моделью.

Математическая модель – выбранный способ математического описания сигнала, отображающий наиболее существенные свойства сигнала. На основе математической модели можно произвести классификацию сигналов с целью определения их общих свойств и принципиальных отличий.

Радиотехнические сигналы принято делить на два класса:

- детерминированные сигналы,
- случайные сигналы.

Детерминированный сигнал – это сигнал, значение которого в любые моменты времени является известной величиной или может быть заранее вычислено.

Случайный сигнал – это сигнал, мгновенное значение которого является случайной величиной (например, звуковой сигнал).

Математические модели детерминированных сигналов

Детерминированные сигналы делятся на два класса:

- периодический,
- непериодический.

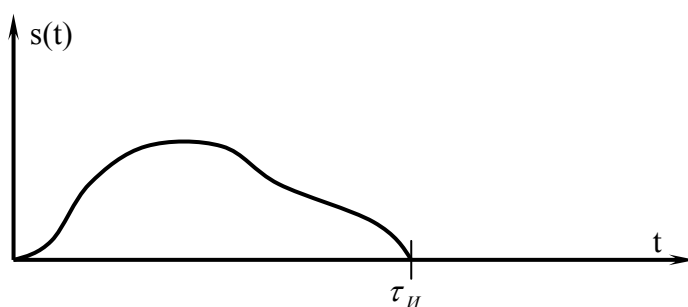
$s(t)$ – детерминированный сигнал. Периодические сигналы описываются периодической функцией времени:

$$s(t) = s(t + T); \quad -\infty < t < \infty$$

и повторяются через период T . Приблизительно $t \gg T$.

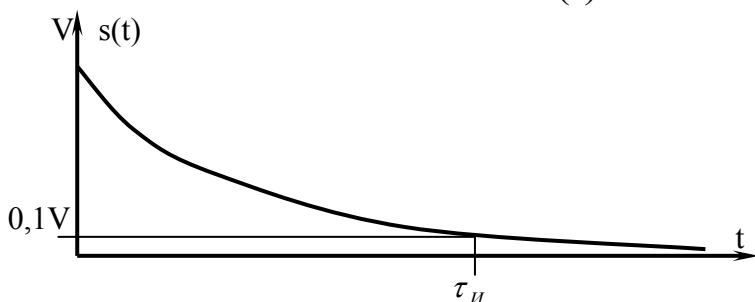
Остальные сигналы непериодические.

Импульс – это сигнал, значение которого отлично от нуля в течение ограниченного интервала времени (длительность импульса τ_{II}).



Однако при описании математической модели используются функции, заданные на бесконечном интервале времени. Вводят понятие эффективной (практической) длительности импульса:

$$s(t) = V \cdot e^{-at}, \quad t \geq 0.$$



Это экспоненциальный импульс.

Например: определение эффективной длительности экспоненциального импульса как интервала времени, в течение которого значение сигнала уменьшается в 10 раз. Определить эффективную длительность импульса для рисунка:

$$s(\tau_{И}) = V \cdot 0,1 \cdot e^{-a\tau_{И}} = 0,1 \cdot V \Rightarrow \tau_{И} = \frac{2,303}{a}.$$

Энергетические характеристики сигнала. Мгновенная мощность — это мощность сигнала на сопротивлении 1 Ом:

$$P^{(t)} = s^2(t).$$

Для непериодического сигнала введем понятие энергии на сопротивлении 1 Ом:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Для периодического сигнала введено понятие средней мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

Динамический диапазон сигнала определяется как отношение максимальной $P^{(t)}$ к той минимальной $P^{(t)}$, которая позволяет обеспечить заданное качество передачи (выражается обычно в дБ):

$$D = 10 \lg \left(\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \right), \quad \text{дБ}.$$

Спокойная речь диктора имеет динамический диапазон примерно 25...30 дБ, у симфонического оркестра до 90 дБ. Выбор значения P_{\min} связан с уровнем помех: $P_{\min} > P_{\text{помехи}}$.

Энергетический метод определения эффективной длительности сигнала

Эффективная длительность сигнала определяется как интервал времени, внутри которого сосредоточена заданная часть (например 90 %) полной энергии

сигнала.

$$s(t) = Ve^{-at}, \quad t \geq 0$$

$$E = \int_0^{\infty} V^2 e^{-2at} dt = V^2 \int_0^{\infty} e^{-at} = \frac{V^2}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = \frac{V^2}{2a}$$

$$\Delta E = \int_0^{\tau_H} s^2(t) dt = V^2 \int_0^{\tau_H} e^{-2at} dt = \frac{V^2}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^{\tau_H} = \frac{V^2}{-2a} (1 - e^{-2a\tau_H})$$

например, при $\Delta E = 90\%$:

$$e^{-2a\tau_H} = 0,1 \Rightarrow \tau_H = \frac{2,303}{2a}.$$

1.2. Спектральные характеристики сигналов

Для описания одного и того же сигнала в зависимости от решаемых задач могут быть использованы различные математические представления:

- временное представление,
- спектральное (частотное) представление.

Временное представление – это описание сигнала с помощью функций времени. Оно определяет свойство и параметры сигнала во временной области (форму, длительность сигнала, энергию, мощность).

Однако при практическом применении сигналов важно знать их свойства не только во временной, но и в частотной области. В этом случае при анализе и расчетах сигналы представляются своими частотными характеристиками, что облегчает решение многих практических задач обработки сигнала. Обычно частотные характеристики называют частотными спектрами, или спектрами, сигнала. Принято и другое название – спектральные характеристики. Спектральные характеристики сигналов изучают на специальных приборах – анализаторах спектра, например на С4-27.

Определение спектра сигнала составляет задачу спектрального анализа. В основе спектрального анализа лежит разложение сигнала на спектральные составляющие. Математические методы спектрального анализа различаются для периодических и непериодических сигналов.

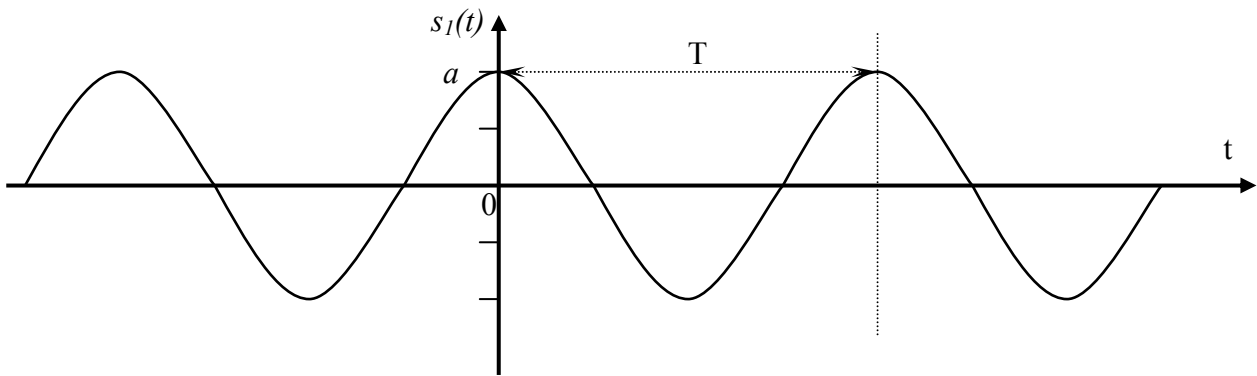
Спектральный анализ периодических сигналов

Периодическим называется сигнал, значение которого повторяется через определенные интервалы времени, которые называют периодом сигнала и обычно обозначают буквой T .

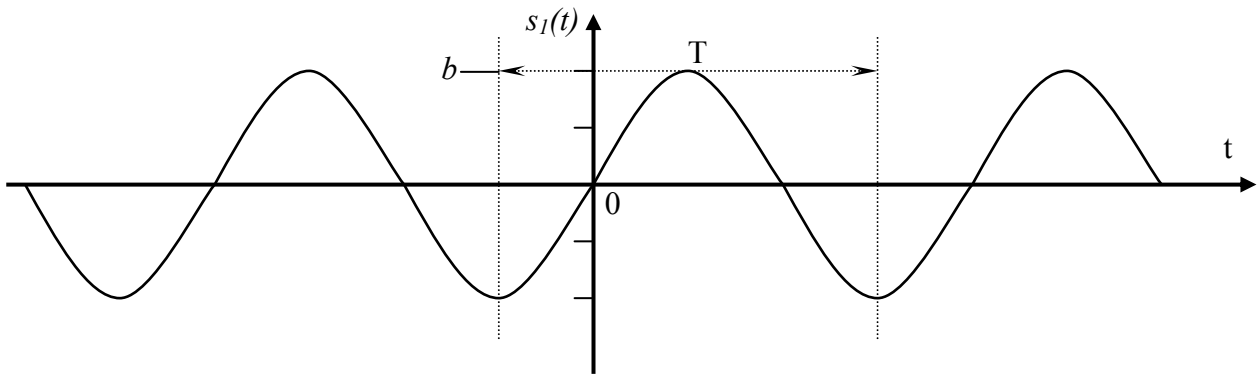
Простейшие периодические сигналы основаны на функциях косинуса или

синуса.

$$s_1(t) = a \cos(\omega t), \text{ где } \omega - \text{ круговая частота, } \omega = 2\pi f; \quad f = \frac{1}{T}; \quad f = \left[\frac{1}{c} \right]$$

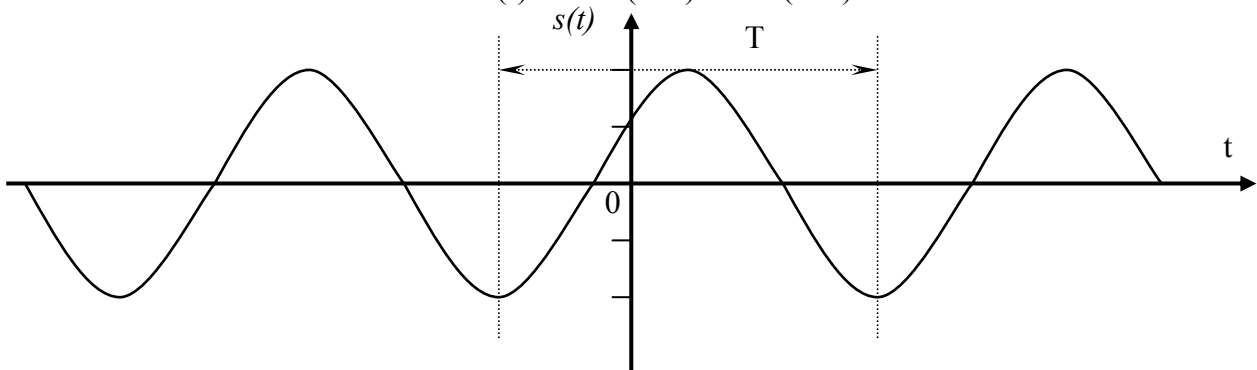


$$s_2(t) = b \sin(\omega t)$$



Одно из простейших гармонических колебаний – это сумма колебаний синуса и косинуса. В данном случае частота одинакова для обоих слагаемых.

$$s(t) = a \cos(\omega \cdot t) + b \sin(\omega \cdot t)$$



Начало координат в данном случае может располагаться произвольно.

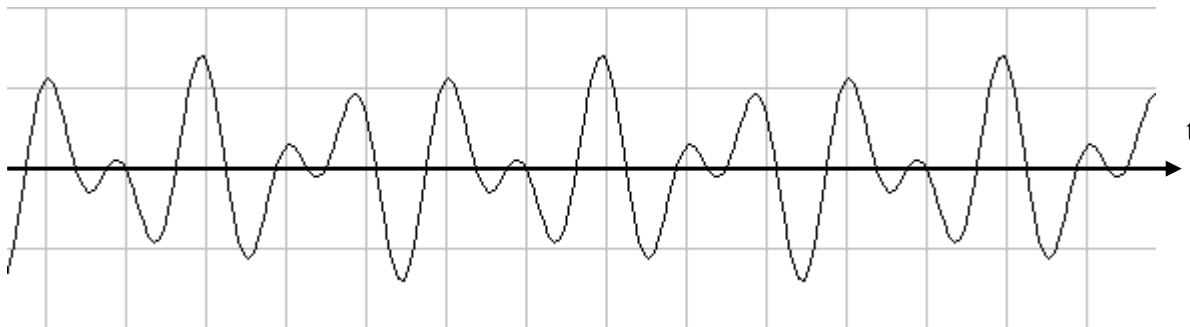
Сложим колебания:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a}.$$

На рисунке показан результат сложения двух сигналов: $f_1 = 600$ Гц, $f_2 = 1000$ Гц. Сдвиг между фазами $\varphi = 45^\circ$, одно деление (клеточка) = 1 мс.



Фурье в 20 гг. XIX века доказал, что любой периодический сигнал можно представить в виде разложения на гармонические (составляющие) колебания

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)),$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{T},$$

где T – период,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

Если сигнал описывается четной функцией времени ($s(t) = s(-t)$), то тогда все коэффициенты b_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t)).$$

Если сигнал $s(t)$ описывается нечетной функцией времени ($s(t) = -s(-t)$), то тогда все коэффициенты a_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t).$$

В общем случае, когда сигнал произвольный, используют другую, более удобную форму записи ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}.$$

Формулы для нахождения a_n и b_n остаются такие же:

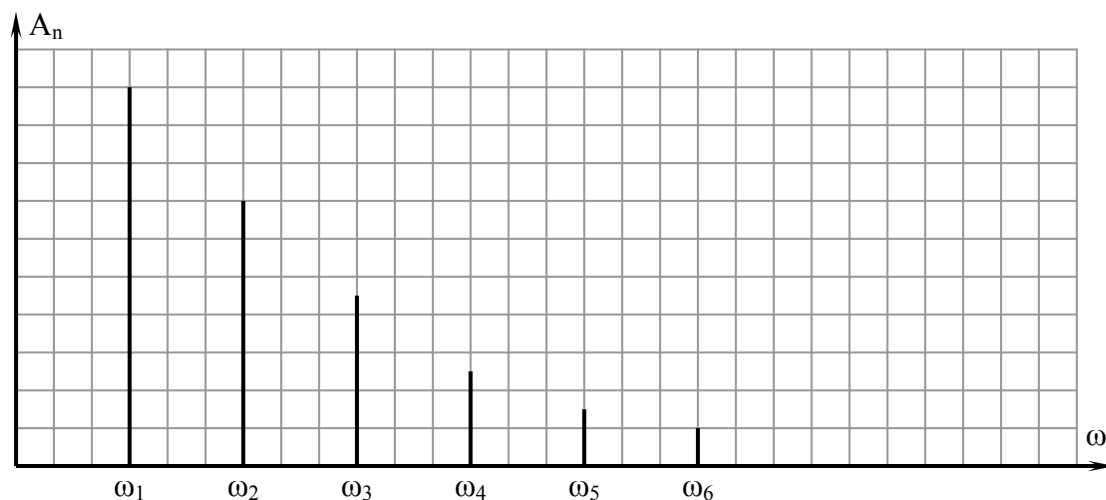
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

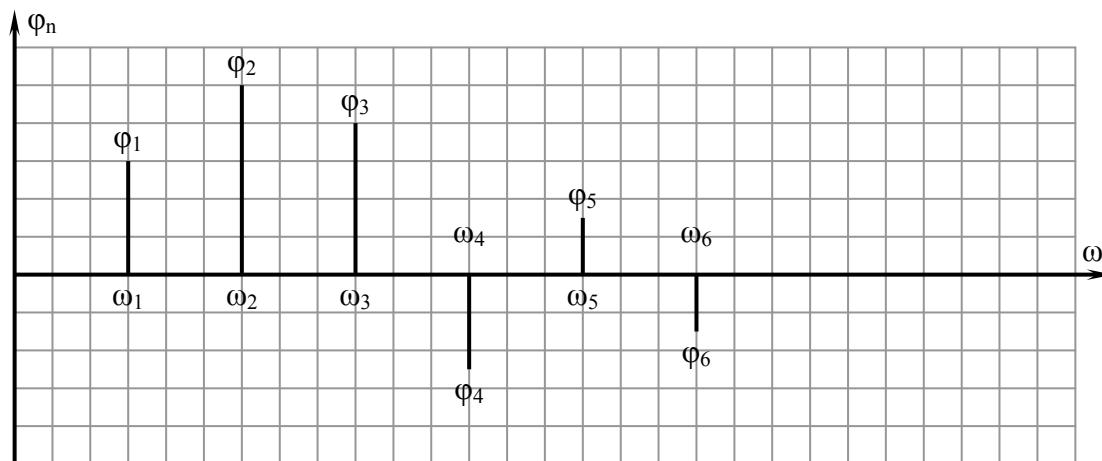
Это представление называют спектральным, или частотным, представлением сигнала. Спектральное представление сигнала - это постоянная составляющая ($A_0/2$) и бесконечное число гармонических составляющих (гармонических сигналов). Число n определяет порядковый номер гармоники. Каждая гармоника характеризуется амплитудой A_n , частотой $n\omega_1$ и начальной фазой φ_n . Гармоника, соответствующая $n = 1$ - это первая (основная) гармоника. Она имеет частоту, равную частоте сигнала.

Совокупность всех амплитуд гармоник A_n определяет амплитудный спектр сигнала, а совокупность всех начальных фаз называется фазовым спектром сигнала.

Графическое изображение спектра называется спектральной диаграммой. Пример спектральной диаграммы



Пример фазовой диаграммы



Графический спектр состоит из отдельных линий, и поэтому он называется линейчатым. Расстояния между гармониками равны основной частоте (чаще бывает так, что какая-либо гармоника равна нулю, и кажется, что расстояние между гармониками разное). На самом деле, это не так и гармонику, равную нулю, тоже необходимо считать (см. пример ниже). Спектр периодического сигнала называют также дискретным, поскольку гармоники определены на дискретных частотах $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1 \dots$

Ширина спектра

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное количество слагаемых, поэтому теоретически ширина спектра бесконечна. Поэтому для таких сигналов вводится понятие практической ширины спектра. Если полоса пропускания какого-либо устройства недостаточно широка, чтобы пропустить все гармоники, существенно влияющие на форму сигнала, то сигнал на выходе этого устройства исказится. Ширина полосы пропускания устройства не должна быть уже ширины спектра сигнала.

Существуют несколько критериев для определения практической ширины спектра сигнала:

1. Можно отбрасывать все гармоники с амплитудами меньшими 1 % максимальной амплитуды в спектре. Тогда частота гармоник и определит ширину спектра сигнала ($\Delta\omega_C$):

$$\Delta\omega_C = \omega_{\text{ВЕРХ}} - \omega_{\text{НИЖН}}.$$

2. Энергетический критерий. Можно отбрасывать те гармоники, суммарная мощность которых меньше 10 % общей мощности сигнала. В этом случае ширину спектра также определяют оставшиеся в сигнале гармоники.

Однако независимо от критерия, по которому определяют ширину спектра сигнала, можно выделить закономерности, общие для всех сигналов:

- чем круче фронт сигнала,
- чем короче импульсы,
- чем больше пауза между импульсами, тем шире спектр сигнала, т. е. тем медленнее убывают амплитуды гармоник с ростом их номера.

Распределение мощности сигнала по гармоникам

Периодические сигналы характеризуются средней мощностью за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt.$$

Если s – это напряжение или ток, то P – это мощность на сопротивлении 1 Ом. Вместо $s(t)$ можно подставить ряд Фурье:

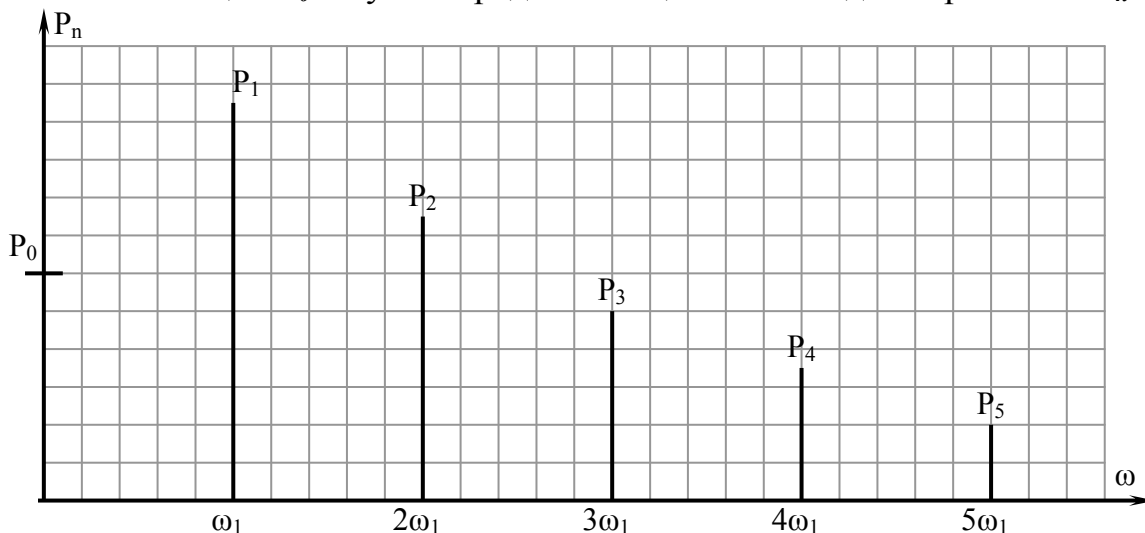
$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_1 t + \varphi_{mn}) \right]^2 dt,$$

$$P = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2},$$

где $P_0 = \frac{A_0^2}{4}$ – мощность постоянной составляющей,

$P_n = \frac{A_n^2}{2}$ – мощность n -й гармоники.

Средняя мощность периодического сигнала равна сумме мощности постоянной составляющей P_0 и сумме средних мощностей каждой гармоники P_n .



$\Delta P = P_0 + \sum_{n=1}^N P_n$, где N – кол-во учитываемых (пропускаемых устройством) гармоник. Например, $\Delta P = 0,9P$, если $\Delta P = 90\%$ от полной мощности сигнала.

Практическая ширина спектра при этом равна

$$\Delta\omega_C = N\omega_1,$$

где N – номер высшей учитываемой гармоники, т. е. практическая ширина спектра равна высшей учтенной гармонике.

Требуемые полосы пропускания для различных задач:

Где используется	Полоса пропускания
Телеграфный сигнал	0...100 Гц
Телефонный сигнал	300...3400 Гц
Звуковое вещание	50 Гц...10 кГц
Телевизионный сигнал	50 Гц...6 МГц

Спектральный анализ непериодических сигналов

Спектральный анализ непериодических сигналов – это описание и исследование свойств непериодических сигналов в частотной области. Спектральный анализ непериодических сигналов проводится на основе интегральных преобразований Фурье.

Прямое преобразование Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt,$$

где \dot{S} - величина комплексная.

Прямое преобразование Фурье дает переход от временной модели сигнала к частотной модели [$s(t) \rightarrow \dot{S}(\omega)$].

Обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Обратное преобразование Фурье восстанавливает сигнал по его частотной модели [$s(t) \leftarrow \dot{S}(\omega)$].

Эта пара преобразований Фурье устанавливает взаимно-однозначное соответствие между двумя моделями сигнала – временной и частотной моделями:

$$s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega).$$

Функция $\dot{S}(\omega)$ - это “**спектральная плотность**”, или “**спектральная функция**”, или, просто, спектр непериодического сигнала $s(t)$. Так как $\dot{S}(\omega)$ - непрерывная функция частоты, то спектр непериодического сигнала является непрерывным спектром (в отличие от дискретного спектра периодических сигналов).

$\dot{S}(\omega)$ в общем случае является комплексной функцией и может быть представлена в показательной форме:

$$\dot{S}(\omega) = \left| \dot{S}(\omega) \right| e^{i\varphi(\omega)}.$$

Различают амплитудный и фазовый спектры непериодического сигнала.

Амплитудный спектр – это частотное распределение модуля спектральной плотности:

$$S(\omega) = \left| \dot{S}(\omega) \right|.$$

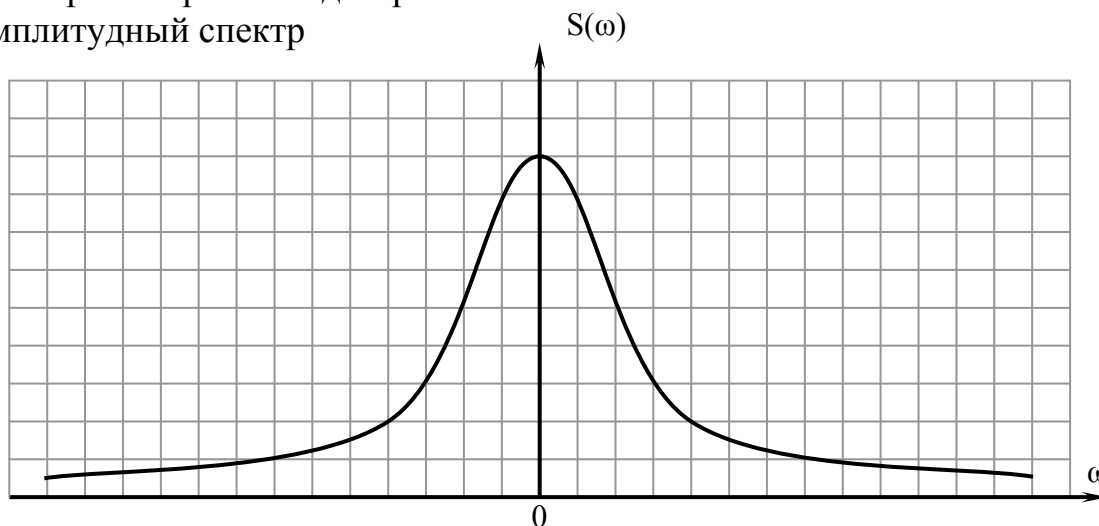
Фазовый спектр – это частотное распределение фаз (аргументов) спектральной плотности:

$$\varphi(\omega) = \arg \dot{S}(\omega).$$

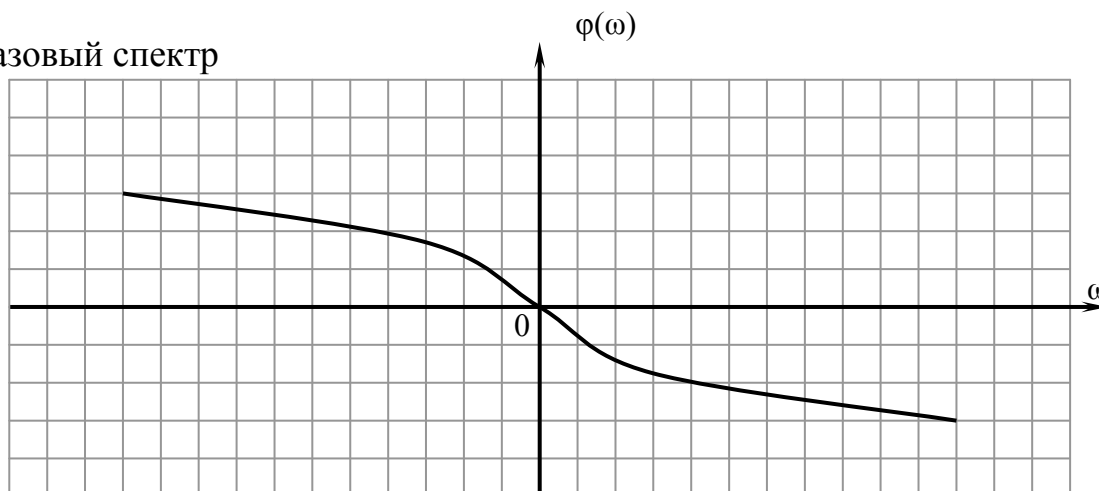
Амплитудный спектр – это четная функция частоты, т. е. $S(-\omega) = S(\omega)$. Фазовый спектр – это нечетная функция частоты, т. е. $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$.

Пример спектральной диаграммы:

Амплитудный спектр



Фазовый спектр



Физический смысл спектральной плотности

В формулу $\dot{S}(\omega) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$ подставим выражение $\dot{S}(\omega) = \left| \dot{S}(\omega) \right| e^{i\varphi(\omega)}$, получим

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot e^{i\varphi(\omega)} e^{i\omega t} d\omega.$$

Перепишем выражение:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega,$$

{
Форма Эйлера:
 $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
}

Так как $\left| \dot{S}(\omega) \right|$ - четная, а $\sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$ - нечетная функция, то выражение

$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$ будет равно нулю. Поэтому в результате останется:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

где $\left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$ - четная функция. Это значит, что данную функцию можно переписать в два интеграла:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \dot{S}(\omega) \right| \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

Таким образом, физический смысл спектральной плотности состоит в том, что сигнал $s(t)$ представлен в виде суммы бесконечно большого числа гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами:

$$dA(\omega) = \frac{1}{\pi} \left| \dot{S}(\omega) \right| d\omega,$$

так как дифференциал – это обозначение бесконечно малой величины.

Бесконечно большое число гармонических составляющих непрерывно заполняют интервал частот от нуля до бесконечности.

Начальные фазы этих составляющих: $0 < \omega < \infty$.

Поэтому

$$\left| \dot{S}(\omega) \right| = \pi \frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{\text{амплитуда}}{\text{частота}}, \text{ например, } \left[\frac{\text{В}}{\text{Гц}} \right] \text{ или } \left[\frac{\text{А}}{\text{Гц}} \right].$$

Спектральная плотность описывает распределения бесконечно малых амплитуд по частоте.

$\varphi(\omega)$ - распределение начальных фаз гармонических составляющих сигнала по

частоте.

Условие существования преобразования Фурье

В математике доказано, что преобразование Фурье существует, если функция $s(t)$ удовлетворяет условию Дирихле и условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

Энергия сигнала:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty,$$

т. е. энергия должна быть ограничена. В реальности все сигналы ограничены, т. е. имеют конечную энергию.

Энергетический спектр непериодического сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt,$$

если вместо $s(t)$ подставить интеграл $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, получим

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$$

Это выражение может быть переписано в два интеграла:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt,$$

$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$. Это равенство называют равенством Парсеваля, где

$|\dot{S}(\omega)|^2 = W$ - энергетический спектр.

График энергетического спектра у прямоугольного импульса будет такой:

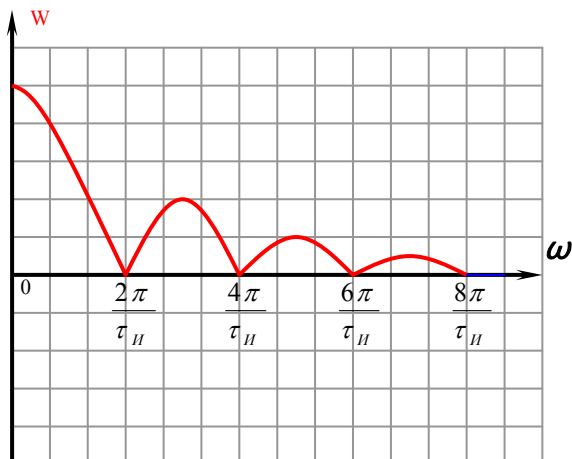


График энергетического спектра у экспоненциального импульса будет такой:



Реально физическими частотами являются только положительные частоты. Отрицательные частоты – это чисто математическое понятие (математический прием), которое используется для того, чтобы выразить действительную функцию времени в комплексном виде. Например:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Поэтому при изображении спектров можно выбирать только положительные частоты.

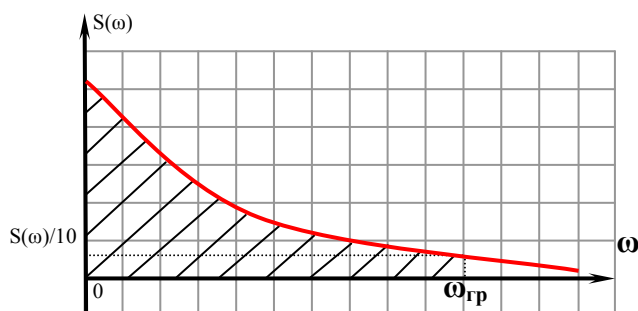
Ширина спектра непериодического сигнала

Теоретически спектр $S(\omega)$ определен на всей оси частот, т. е. $-\infty < \omega < \infty$.

Практически спектр $S(\omega)$ определен на положительной оси частот: $0 < \omega < \infty$.

Поэтому вводят понятие практической ширины спектра. Есть несколько критериев для определения практической ширины спектра.

Практическая ширина спектра определяется как интервал частот, в котором значения амплитуды превышают некоторый заданный уровень. Например:



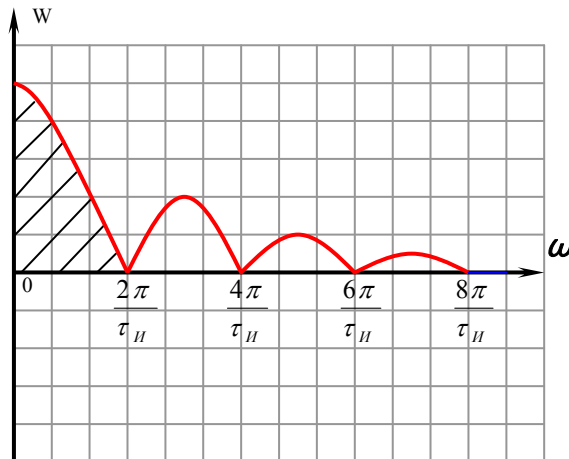
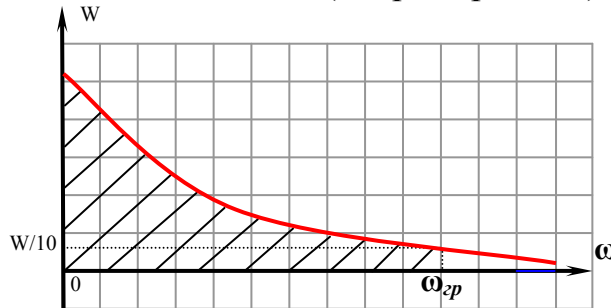
$\omega_{гр}$ – это верхняя частота, при которой модуль амплитуды спектра уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальной:

$$|S(\omega)| = \frac{V}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}; \quad |S(\omega_{ep})| = 0,1 \cdot S(0),$$

$$\frac{V}{\sqrt{a^2 + \omega_{ep}^2}} = \frac{V}{10a},$$

$$a^2 + \omega_{ep}^2 = 100a^2 \Rightarrow \omega_{ep} = \sqrt{99} \cdot a.$$

Практическая ширина спектра определяется как интервал частот, в пределах которого сосредоточена большая (например, 90 %) часть энергии.



Для прямоугольного импульса, как показывают расчеты, 90 % энергии сосредоточено в первом лепестке.

Поэтому $\omega_{ep} = \frac{2\pi}{\tau_n} = \Delta\omega_c \Rightarrow f_{ep} = \frac{1}{\tau_n} \Rightarrow f_{ep} \cdot \tau_n = 1.$

Произведение ширины спектра и длительности импульса в данном случае равно единице.

База неперiodического сигнала

База сигнала – это один из важнейших параметров сигнала:

$$B = \Delta f_c \cdot \tau_n.$$

Произведение ширины спектра на длительность сигнала – это постоянная величина. В зависимости от величины **B** все сигналы делят на две группы:

- 1) Если база сигнала близка к единице, то такие сигналы называют простейшими.
- 2) Если база сигнала значительно больше единицы, то такие сигналы на-

зывают сложными.

Соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра

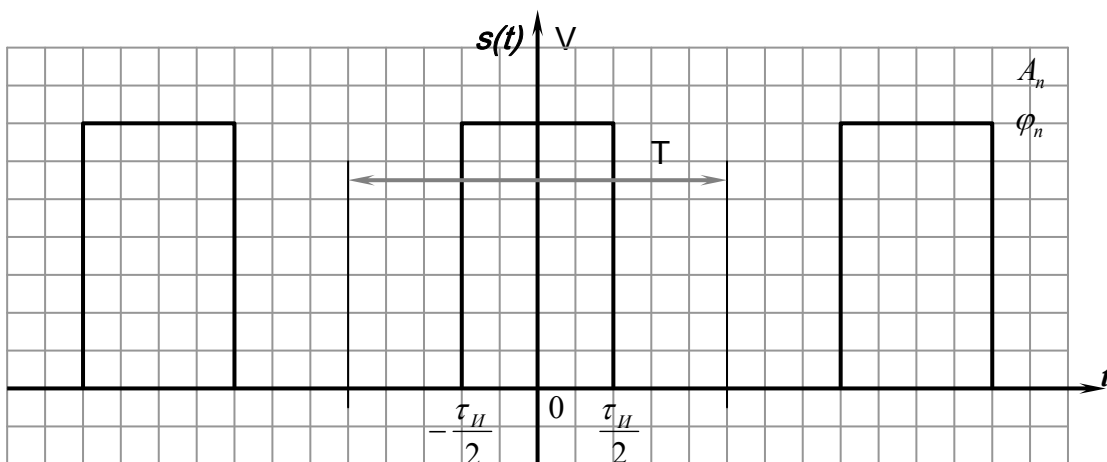
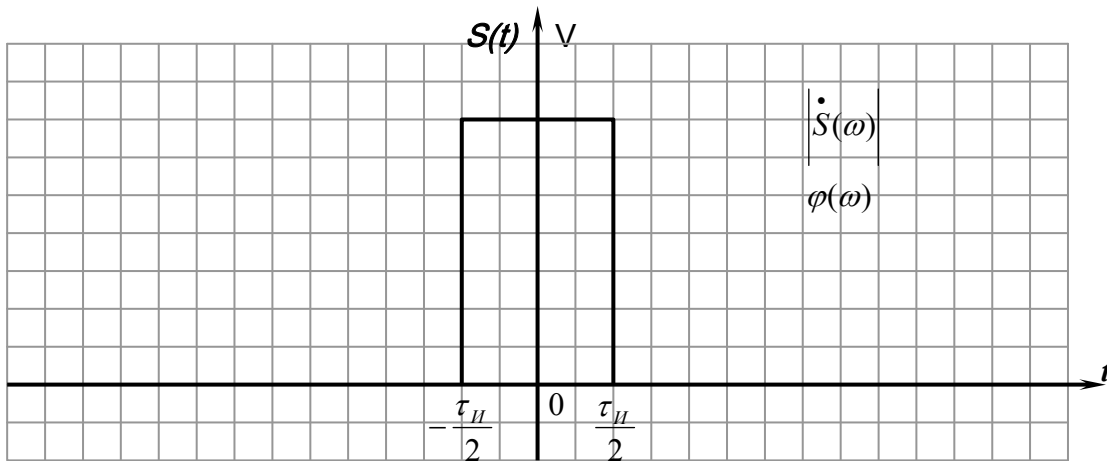
$$B = \Delta f_c \cdot \tau_{II} - \text{const},$$

отсюда $\Delta f_c \sim \frac{1}{\tau_{II}}$, т. е. частота спектра сигнала изменяется обратно пропорцио-

нально его длительности. Это значит, что, чем протяженнее сигнал во времени, тем уже его спектр, и наоборот, чем короче сигнал, тем шире его спектр.

Соотношение между спектром одиночного импульса и спектром периодической последовательности импульсов

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{T} |\dot{S}(n\omega_1)| \\ \varphi_n = \varphi(n\omega_1), \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$



$\dot{S}(n\omega_1)$ -значение спектральной плотности одиночного импульса на частоте $\omega = n\omega_1$, где $n\omega_1$ – частоты гармоник. Эти функции практически используются для определения спектров периодических сигналов. Последовательность действий

при определении спектра периодического сигнала по спектру одиночного импульса:

1. Определить спектральную плотность центрального одиночного импульса.
2. Записать формулу амплитудного спектра путем подставления в эту

формулу вместо частоты ω частоту $n\omega_1$, и по формуле $A_n = \frac{2}{T} \left| \dot{S}(n\omega_1) \right|$ вычислить амплитудный спектр периодической последовательности импульсов.

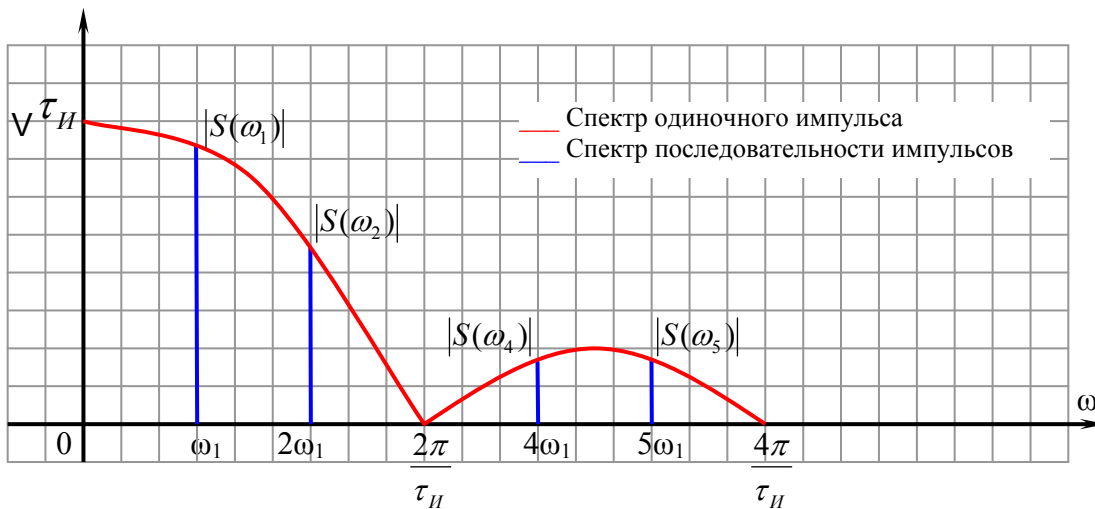
3. В формулу фазового спектра одиночного импульса вместо текущей частоты ω подставить текущую частоту $n\omega_1$, и по формуле $\varphi_n = \varphi(n\omega_1)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, вычислить фазовый спектр периодической последовательности импульсов.

ВЫВОД. Непрерывный амплитудный спектр одиночного импульса является огибающей дискретного амплитудного спектра периодической последовательности импульсов. Непрерывный фазовый спектр одиночного импульса является огибающей дискретного фазового спектра периодической последовательности импульсов.

Продемонстрируем все вышесказанное на примере. В качестве сигнала возьмем импульсы:

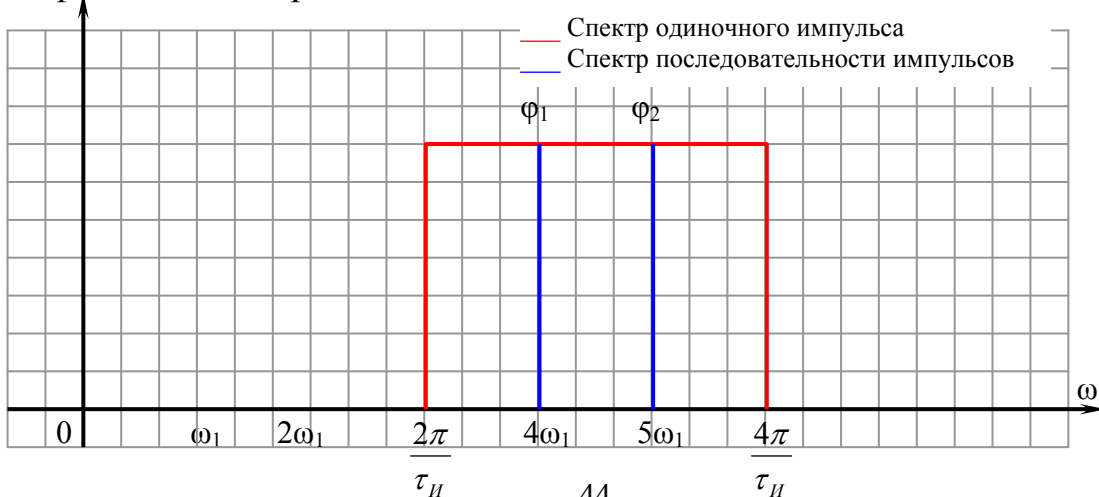
$S(\omega) = V\tau_H \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_H}{2}\right)$, найдем амплитудный спектр периодической последовательности

прямоугольных импульсов: $A_n = \frac{2V\tau_H}{T} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_1\tau_H}{2}\right) \right|, n=1, 2, 3, \dots$



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \quad A_1 = |S(\omega_1)| \cdot \frac{2}{T}, \quad A_2 = |S(2\omega_1)| \cdot \frac{2}{T}, \quad A_4 = |S(4\omega_1)| \cdot \frac{2}{T}, \quad A_0 = V\tau_H$$

Форма фазового спектра



Связь между преобразованием сигналов и спектров

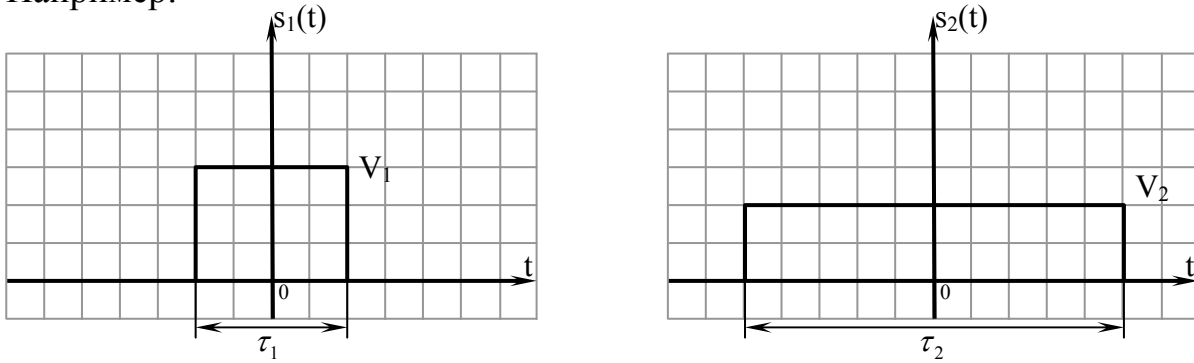
Запись $s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$ означает, что сигнал и его спектр однозначно связаны преобразованиями Фурье. В математике известны свойства преобразования Фурье. На основании этих свойств можно установить соответствие между преобразованиями сигналов и соответствующими преобразованиями их спектров. На основании свойств преобразований Фурье можно:

- вычислять спектры сложных сигналов,
 - установить, как изменится спектр, если изменится каким-либо образом сигнал.
- Первое свойство - свойство линейности.

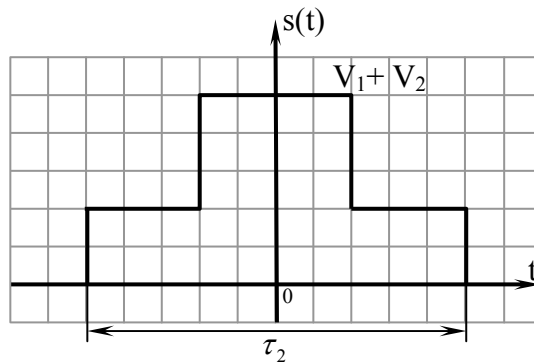
$$\left. \begin{array}{l} s_1(t) \leftrightarrow \dot{S}_1(\omega) \\ s_2(t) \leftrightarrow \dot{S}_2(\omega) \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot s_1(t) \pm b \cdot s_2(t) \leftrightarrow a \cdot \dot{S}_1(\omega) \pm b \cdot \dot{S}_2(\omega),$$

где a и b – это некоторые постоянные.

Например:



Результат сложения этих двух сигналов:



Спектр сигналов:

$$\dot{S}_1(\omega) = V_1 \tau_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_1}{2}\right), \quad \dot{S}_2(\omega) = V_2 \tau_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_2}{2}\right).$$

Спектр результирующего сигнала: $\dot{S}(\omega) = V_1 \tau_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_1}{2}\right) + V_2 \tau_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_2}{2}\right).$

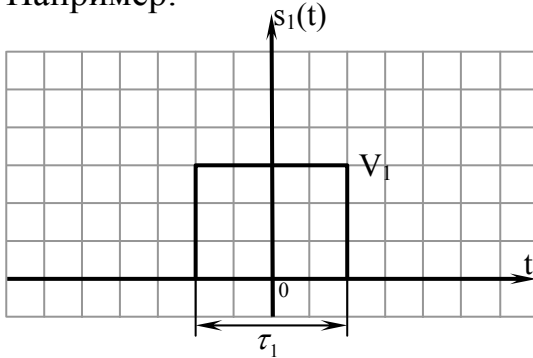
➤ Второе свойство - смещение сигнала во времени.

$$s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega) \text{ при смещении во времени: } s(t - t_0) \leftrightarrow \dot{S}(\omega) \cdot e^{-i\omega t_0},$$

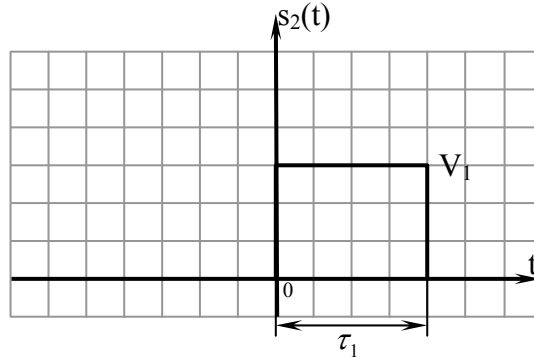
$$s(t + t_0) \leftrightarrow \dot{S}(\omega) \cdot e^{+i\omega t_0}.$$

При смещении сигнала во времени его амплитудный спектр не изменяется. Изменяется только фазовый спектр.

Например:



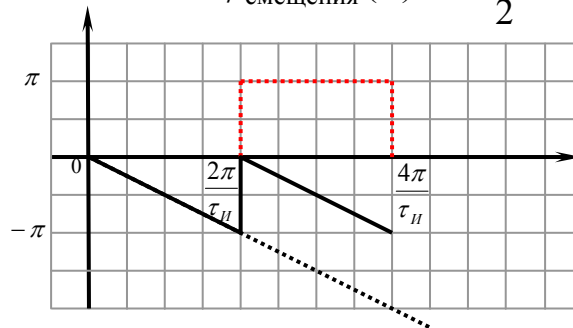
$$S_1(\omega) = V\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right),$$



$$S_2(\omega) = V\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}.$$

Амплитудный спектр не изменяется, фазовый спектр изменяется:

$$\varphi_{\text{смещения}}(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2}.$$



➤ Третье свойство - изменение временного масштаба сигнала $a > 0$:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

При изменении временного масштаба происходит обратное изменение частотного масштаба. При сжатии сигнала во времени его спектр расширяется, а при растягивании сигнала его спектр сужается:

$$\Delta\omega_c \sim \frac{1}{\tau_c}.$$

➤ Четвертое свойство - смещение сигнала по частоте:

$$s(t) \cdot e^{\pm i\omega_0 t} \leftrightarrow \dot{S}(\omega \mp \omega_0).$$

- Пятое свойство - дифференцирование сигнала:

$$s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega \mp \omega_0),$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega \dot{S}(\omega).$$

- Шестое свойство - интегрирование сигнала

$$\int s(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{i\omega} \dot{S}(\omega).$$

1.3. Дискретизация сигналов. Теорема отсчетов

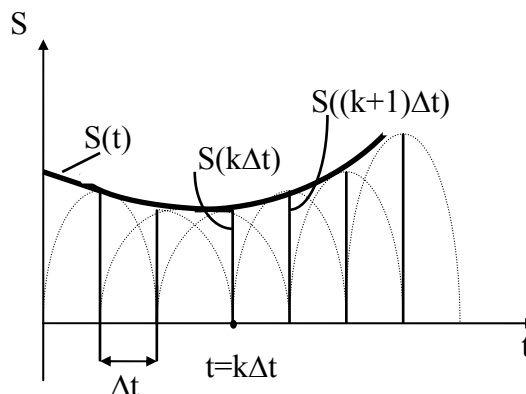
Сигналы с ограниченными и полосовыми спектрами

С целью упрощения задач анализа сигналов в инженерных расчетах учитывают только ту часть спектра, в которой сосредоточено до 80...95 % энергии сигнала. Поэтому чаще всего большинство сигналов рассматривают как сигналы с ограниченными спектрами. Для их анализа наряду с разложением Фурье широко применяют разложение Котельникова.

Рассмотрим основные особенности этого разложения.

Ортогональное разложение Котельникова для непрерывных сигналов с ограниченными спектрами позволяет представлять их в виде импульсных последовательностей. Теоретической основой разложения служит теорема Котельникова (теорема отсчетов): любая непрерывная функция $S(t)$, не содержащая частот выше F , полностью определяется последовательностью значений в моменты, отстоящие друг от друга на время $\Delta t = 1/2F$.

Общее число отсчетов n для сигнала длительностью T будет равно $n = T/\Delta t = 2FT = \nu$. Число ν называют базой сигнала.



Для сигнала $S(t)$, спектр которого лежит в интервале $[0, F]$, ортогональное разложение Котельникова имеет вид

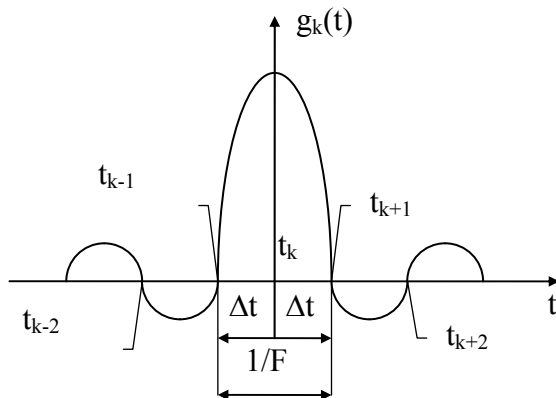
$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)},$$

где $S(k\Delta t) = S_k$ – отсчет сигнала в момент времени t_k ;

$[\sin 2\pi F(t - k\Delta t)]/[2\pi F(t - k\Delta t)]$ – базисная система ортогональных функций с общей

нормой $1/2F$; $\Delta t=1/2F$ -интервал дискретизации, равный норме базисных функций. Функции $g_k=[\sin 2\pi F(t-k\Delta t)]/[2\pi F(t-k\Delta t)]$ называют функциями отсчетов, а значения $S(k\Delta t)$ – отсчетами. График функции отсчетов имеет вид, представленный на рисунке ниже.

Ортогональность функций отсчетов проверяют путем вычисления интеграла



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi F(t-k\Delta t)\sin 2\pi F(t-j\Delta t)}{2\pi F(t-k\Delta t)2\pi F(t-j\Delta t)} dt = \begin{cases} F/2, j = k \\ 0, j \neq k. \end{cases}$$

Интервал дискретизации не превышает половины периода наиболее высокой частоты спектра сигнала, что уменьшает число членов в данном разложении по сравнению с разложением Фурье при одинаковой точности аппроксимации. Точность аппроксимации так же, как и в случае разложения Фурье, определяется количеством учитываемых отсчетов. При этом мощность сигнала через заданную последовательность временных выборок выражается равенством Парсеваля:

$$\text{- энергия сигнала } E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{-\infty}^{\infty} S_k^2;$$

-мощность сигнала за период колебания

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{2FT} \sum_{k=0}^{2FT} S_k^2.$$

Из последнего выражения следует, что средняя за период T мощность непрерывного сигнала равна среднему квадрату выборки. Усреднение производится по всем интервалам, число которых $2FT$.

Достоинства ортогонального разложения следующие: базисная система ортогональных функций выбрана так, что ряд Котельникова носит формальный характер, т. е. в любой момент отсчета t_k он дает одно значение S_k , остальные составляющие ряда вырождаются в нуль; коэффициенты ряда Котельникова можно не вычислять; их определяют путем измерения значений сигнала или из его аналитической формы; зная длительность сигнала T и граничную частоту F , определяют

требуемое число отсчетов $n=2FT$ и энергию сигнала; относительная простота реализации как разложения (т. е. дискретизации) непрерывного сигнала в импульсную последовательность, так и последующего его восстановления.

Остановимся более подробно на последней особенности. Для этого рассмотрим физический смысл разложения Котельникова. Каждый член ряда представляет собой отклик идеального фильтра нижних частот g_k с частотой среза F на очень короткий импульс, приходящий в момент $t_k=k\Delta t$ и имеющий площадь $S(k\Delta t)$. Поэтому при дискретной передаче сигнала $S(t)$ с ограниченным спектром необходимо через равные интервалы времени Δt брать отсчеты мгновенных значений сигнала и передавать по каналу последовательность достаточно коротких импульсов длительностью τ , причем $\tau/\Delta t \ll 1$. Амплитуду импульсов A_k в момент времени $t_k=k\Delta t$ выбирают так, чтобы $A_k\tau=S(k\Delta t)=S_k$. В приемном устройстве выделенная последовательность видеоимпульсов пропускается через фильтр нижних частот, на выходе которого восстанавливается переданный непрерывный сигнал. Длительность импульсов τ может быть сколь угодно малой, но выбирают ее исходя из полосы прозрачности канала связи. Частота дискретизации (тактовая частота) равна $2F$.

Сигналы с полосовыми спектрами

Если сигнал $S(t)$ непрерывный, имеет полосовой спектр шириной $\Delta F_1=f_1-f_2$, то его можно представить в виде ортогонального разложения следующего вида:

$$S(t) = \sum S\left(\frac{k}{F_1}\right) \frac{\sin \pi \Delta F_1(t - k/\Delta F_1)}{\pi \Delta F_1(t - k/\Delta F_1)} \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{k}{\Delta F_1} \right) + \varphi \left(\frac{k}{\Delta F_1} \right) \right],$$

где $\omega_0=2\pi(f_1+f_2)/2$ – среднее значение угловой частоты спектра сигнала; $\Delta t=1/2\Delta F_1$; $S(k/\Delta F_1)$; $\varphi(k/\Delta F_1)$ – отсчеты амплитуды и фазы сигнала в моменты $t_k=k\Delta t$. Из формулы видно, что для сигналов с полосовыми спектрами необходимо через интервал дискретизации отсчитывать мгновенные значения не только амплитуд, но и фаз. Так, в частности, дискретизируют однополосные колебания – сигналы с полосовыми спектрами.

Основные особенности ортогонального разложения Котельникова следующие: базисная система включает совокупность ортогональных функций отсчетов, каждая из которых представляет собой модулированное по амплитуде колебание с несущей частотой ω_0 и огибающей, определяемой функцией $g_k(t)$; помимо отсчетов амплитуд берутся отсчеты фаз; если длительность сигнала T , то число отсчетных точек $n=T/\Delta t=2T\Delta F_1$.

В целом, все ортогональные разложения Котельникова – теоретическая основа большинства методов дискретной передачи непрерывных сигналов. Они позволяют с единых позиций рассматривать передачу как дискретных, так и непрерывных сигналов.

Теорема отсчетов в частотной области

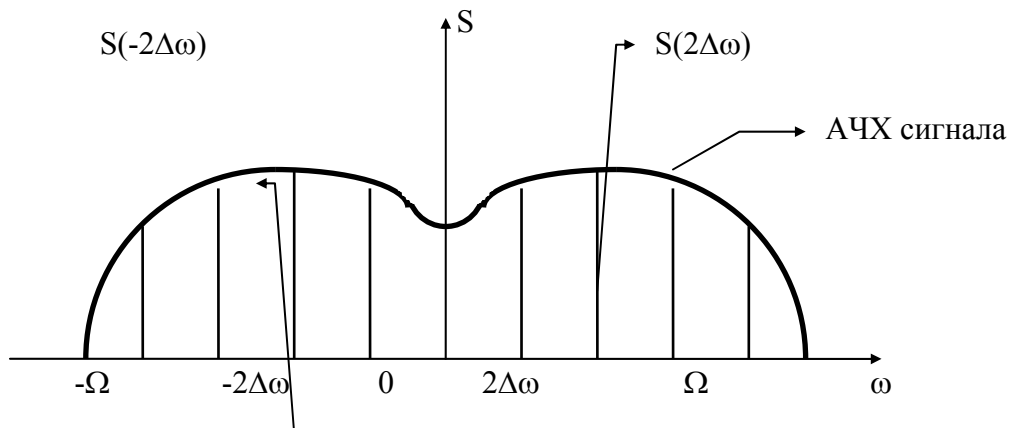
При анализе сигналов с непрерывными спектрами часто бывает необходимо представить сигнал с помощью частотных выборок спектральной функции $\dot{S}(\omega)$, а не временных выборок функции $S(t)$.

Для функции $\dot{S}(\omega)$ можно составить ряд, аналогичный предыдущему выражению, на основании взаимной заменяемости переменных t и ω в паре преобразований Фурье. Это означает, что t следует заменить на ω , $2\Omega=2\pi F$ на T , $\Delta t=1/2F$ на $\Delta\omega=2\pi/T$.

Таким образом, получаем

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \dot{S}(k\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - k\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - k\Delta\omega)} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \dot{S}(k\frac{2\pi}{T}) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - k\frac{2\pi}{T})}{\frac{T}{2}(\omega - k\frac{2\pi}{T})}.$$

Расстановка частотных выборок иллюстрируется следующим рисунком.



Если ранее временной интервал между двумя соседними выборками не должен был превышать $2\pi/2\Omega$, то теперь частотный интервал не должен превышать $2\pi/T$. При ширине спектра 2Ω , охватывающей область частот $\Omega < \omega < \Omega$, число выборок равно $2\Omega/\Delta\omega = 2FT$, т. е. как и при представлении сигнала рядом.

В общем случае выборки $\dot{S}(k2\pi/T)$ являются комплексными числами, и в каждой отсчетной точке на оси частот должны быть заданы два параметра – действительная и мнимая части $\dot{S}(k2\pi/T)$, или модуль и аргумент. Таким образом, общее число параметров получается вдвое большим, чем при временном представлении сигнала, когда выборки $S(k/2F)$ – действительные числа. Избыточность представления сигнала в частотной области легко устраняется, если учесть, что $\dot{S}(k2\pi/T)$ и $\dot{S}(-k2\pi/T)$ являются комплексно-сопряженными функциями, так что задание одной из них однозначно определяет другую. Таким образом, спектр сиг-

нала полностью характеризуется совокупностью комплексных выборок, взятых только в области положительных частот, и числом независимых параметров $\nu=2FT$, как и при представлении сигнала во временной области.

1.4. Корреляционные характеристики сигналов

Автокорреляционная (автоковариационная) функция

Выражение

$$(S_1(t), S_2(t-\tau)) = B_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-\tau)dt$$

называется корреляционной функцией сигнала (правильнее, автоковариационной) АКФ $S(t)$.

Свойства АКФ:

- 1) $B_S(0) = E$ (очевидно),
- 2) $B_S(\tau) = B_S(-\tau)$ (замена переменных),
- 3) $|B_S(\tau)| \leq B_S(0)$.

Связь между АКФ и его энергетическим спектром

По определению АКФ $B_S(\tau) = (S, S_\tau)$

$$B_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-\tau)d\tau.$$

Используя формулу Рэлея, получим

$$B_S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S_\tau^*(\omega)d\omega.$$

Используя теорему о сдвиге, $S_\tau^*(\omega) = S^*(\omega)e^{j\omega\tau}$ подставим в $B_S(\tau)$:

$$B_S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S^*(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega,$$

т. е. $B_S(\tau)$ есть обратное преобразование Фурье от $W(\omega)$. Следовательно, $W(\omega)$ есть прямое преобразование Фурье от $B_S(\tau)$:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_S(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

так как $W(\omega) = |S(\omega)|^2$, то $W(\omega)$ - действительная положительная функция, четная

$$W(\omega) = a^2(\omega) + b^2(\omega), \text{ где } a(\omega) = R_e S(\omega); b(\omega) = I_m S(\omega).$$

Это способ определения спектральной плотности энергии:

$$\begin{aligned}
B_S(\tau) &= \int_{\tau}^T A^2 \cos \omega t \cos \omega(t - \tau) dt = \frac{A^2}{2} \left[\int_{\tau}^T \cos \omega t dt + \int_{\tau}^T \cos \omega(2t - \tau) dt \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau (T - \tau) + \frac{A^2}{2} \frac{T}{\tau} \int_{\tau}^T \cos \omega(2t - \tau) dt = \\
&\quad 2t - \tau = u \quad t = \tau \quad u = \tau \\
&\quad 2dt = du \quad t = \tau \quad u = 2T - \tau \\
&= \frac{A^2 (2T - \tau) \cos \omega \tau}{2} + \frac{A^2}{4} \frac{2T - \tau}{\tau} \int_{\tau}^T \cos \omega u du = \frac{A^2 (T - \tau)}{2} \cos \omega \tau + \frac{A^2}{4\omega} [\sin \omega(2T - \tau) - \sin \omega \tau] = \\
&= \frac{A^2 (T - \tau)}{2} \cos \omega \tau + \frac{A^2}{2\omega} \cos \omega T \sin \omega(T - \tau) = \frac{A^2 (T - \tau)}{2} \cos \omega \tau + \\
&+ \frac{A^2}{2\omega} \frac{1}{2} [-\sin \omega \tau + \sin(2\omega T - \omega T)].
\end{aligned}$$

Взаимокорреляционная функция двух сигналов ВКФ (взаимоковариационная)

Эта функция описывает похожесть или различие сигналов и их взаимное расположение на временной оси.

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t - \tau) dt,$$

$$B_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t - \tau) S_2(t) dt,$$

$$B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau).$$

Пример

$$S_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases} \quad S_2(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases},$$

$$S_2(t - \tau) = \begin{cases} A \cos \omega t(t - \tau) & \tau \leq t + T + \tau \\ 0 & t \notin [T, T + \tau] \end{cases},$$

$$B_{12}(\tau) = \int_{\tau}^T S_1(t) S_2(t - \tau) dt = \int_{\tau}^T A^2 \cos \omega(t - \tau) dt = A^2 \int_0^{T - \tau} \frac{\cos u}{\omega} du =$$

$$= \frac{A^2}{\omega} \sin \omega(T - \tau),$$

$$\omega(t - \tau) = u, \quad t = \tau \quad u = 0,$$

$$\omega dt = du, \quad t = T \quad u = \omega(T - \tau).$$

Связь ВФК со взаимной спектральной плотностью

Используя формулу Релея:

$$B_{12}(\tau) = (S_1, S_{2\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_{2\tau}^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Общие свойства сигналов:

1. Сигналы с постоянными параметрами информацию не несут.
2. Чем чаще во времени изменяется сигнал, тем большую информацию он может нести (примеры – цифровые сигналы, последовательный код). Для передачи большого объёма информации надо использовать высокочастотные сигналы.
3. Чем выше частота сигнала, тем легче его излучать и концентрировать энергию в нужном направлении.
4. Если сигналы не перекрываются по спектру, то их скалярное произведение равно 0.
3. Если сигналы не перекрываются по времени, то их скалярное произведение равно 0.
6. Некоторые сигналы могут перекрываться и по спектру, и по времени, но их скалярное произведение равно 0 на ограниченном отрезке времени (пример – разные системы отрезков функций).
7. Некоторые сигналы могут перекрываться и по спектру, и по времени, но их скалярное произведение равно 0 по всей оси времени (Котельников – время).
8. Некоторые сигналы могут перекрываться и по спектру, и по времени, но их скалярное произведение равно 0 по всей оси частот (Котельников – частота). Но нет перекрытий по времени, так как если Котельников – частота, то во времени – это импульс.

Теорема о спектре произведения сигналов

Заданы сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ со своими спектрами $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$.

Определить спектр произведения:

$$S(t) = S_1(t)S_2(t),$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Заменим один из сигналов через спектр с помощью обратного преобразования Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega S_2(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) e^{j\Omega t} S_2(t) e^{-j\omega t} dt d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t) e^{-jt(\omega-\Omega)} dt d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) S_2(\omega - \Omega) d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\nu) S_2(f - \nu) d\nu.$$

Спектр произведения двух сигналов равен свертке их спектров.

Пример

$$S(t) = U(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad \text{Пусть } \frac{dU}{dt} \frac{1}{Um} \ll f_0 \quad (\text{для простоты}),$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\Omega) d\Omega, \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu) d\nu,$$

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U(f - \nu) [\delta(\nu - f_0) + \delta(\nu + f_0)] d\nu = \frac{1}{2} [U(f - f_0) + U(f + f_0)].$$

2. Модулированные сигналы

2.1. Временное и спектральное представления сигналов с амплитудной модуляцией

Основная задача радиотехники – передача сообщений на расстояние с помощью электромагнитных волн. До изобретения радиосвязи были известны способы передачи информации по проводам. Несмотря на все разнообразие передач сообщений, у них есть общее свойство – каждое сообщение преобразуется в электрический сигнал, который занимает определенную полосу на оси частот. Звуковые частоты лежат в диапазоне 20 Гц ÷ 20 кГц, однако для удовлетворительного звучания достаточен более узкий сигнал: 20 Гц ÷ 10 кГц.

Возможна одновременная передача различных сообщений нескольким абонентам. Это достигается тем, что каждым двум абонентам выделяется отдельная линия связи – провод. При использовании большого числа проводов осуществляется многоканальная связь. Если бы мы захотели осуществить связь с помощью электромагнитных волн с частотами речи каждого абонента, то разделенный прием сигнала каждого абонента был бы невозможен, так как электромагнитные волны будут смешиваться в приемниках абонентов и их невозможно разделить. Кроме того, для формирования электромагнитных волн низкочастотного диапазона потребуются слишком большие антенны – соизмеримые с длиной волны. Такие антенны неудобны в эксплуатации, а их изготовление слишком дорого. Поэтому при передаче сообщений с помощью электромагнитных волн используют различные частоты. Для многоканальной радиосвязи каждому каналу выделяется волна определенной высокой частоты.

“Разнос” сообщений по частоте достигается с помощью модуляции. Для

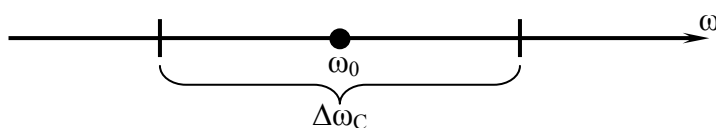
приема любого из передаваемых сообщений приемники настраивают на нужную частоту.

Модуляция – это процесс изменения одного из параметров высокочастотного колебания под воздействием низкочастотного сигнала, отображающего передаваемое сообщение. Высокая частота (ВЧ) – это гармоническое колебание (несущая).

$$U_H(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где V_0 – амплитуда; ω_0 – несущая частота; φ_0 – начальная фаза. На практике начальная фаза редко бывает важна и ее обычно принимают равной нулю.

При модуляции один из параметров высокочастотного колебания (ВЧ - колебания) изменяется по закону низкочастотного (НЧ) сигнала $s(t)$. Модулированный сигнал занимает некоторую полосу частот около несущей частоты.



Необходимо, чтобы выполнялось условие $\frac{\Delta\omega_c}{\omega_0} \ll 1$. Это условие узкополосности сигнала.

Каждой радиостанции выделяется своя несущая частота.

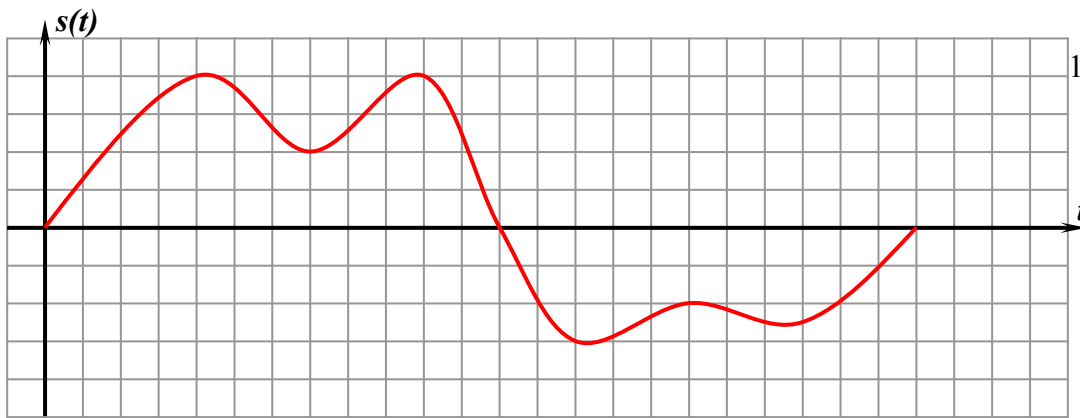
При амплитудной модуляции (АМ) по закону передаваемого сообщения изменяется амплитуда несущего колебания:

$$U(t) = V(t) \cos \omega_0 t, \quad (\varphi = 0),$$

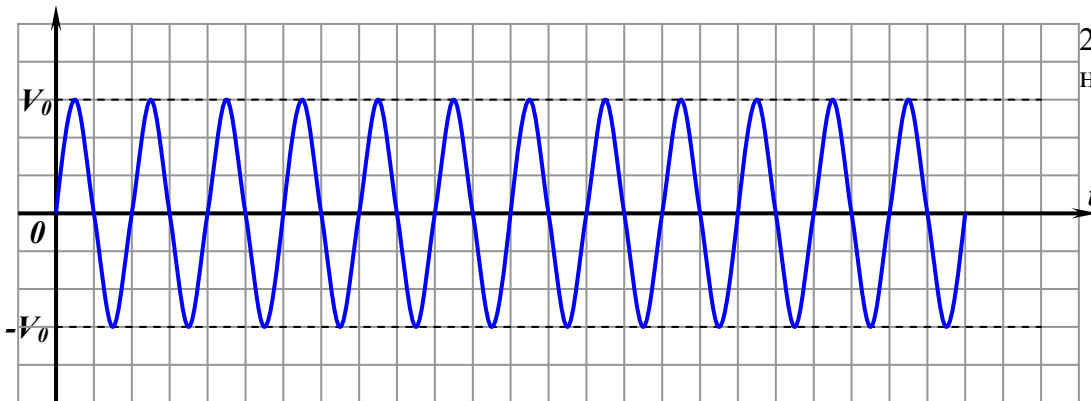
$$V(t) = V_0 + k s(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

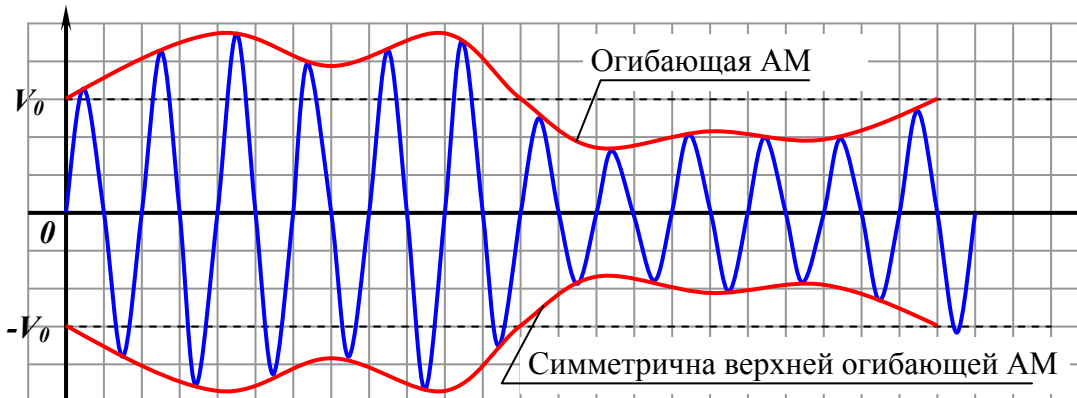
На следующих трех графиках поясняется процесс амплитудной модуляции



1. НЧ - сигнал



2. ВЧ - колебания



3. Модулированные ВЧ - колебания по закону НЧ - сигнала.

Для того, чтобы огибающая $V(t)$ повторяла форму низкочастотного сигнала, нужно, чтобы несущая частота была значительно выше частоты модуляции. Ω – частота модуляции.

$$\omega_0 \gg \Omega_{MAX},$$

где Ω_{MAX} – это максимальная частота в спектре модулирующего сигнала.

Тонально-амплитудная модуляция (ТАМ)

Для того, чтобы рассмотреть основные параметры АМ-сигнала, возьмем в качестве модулирующего сигнала гармонический сигнал.

$$s(t) = V_m \cos \Omega t,$$

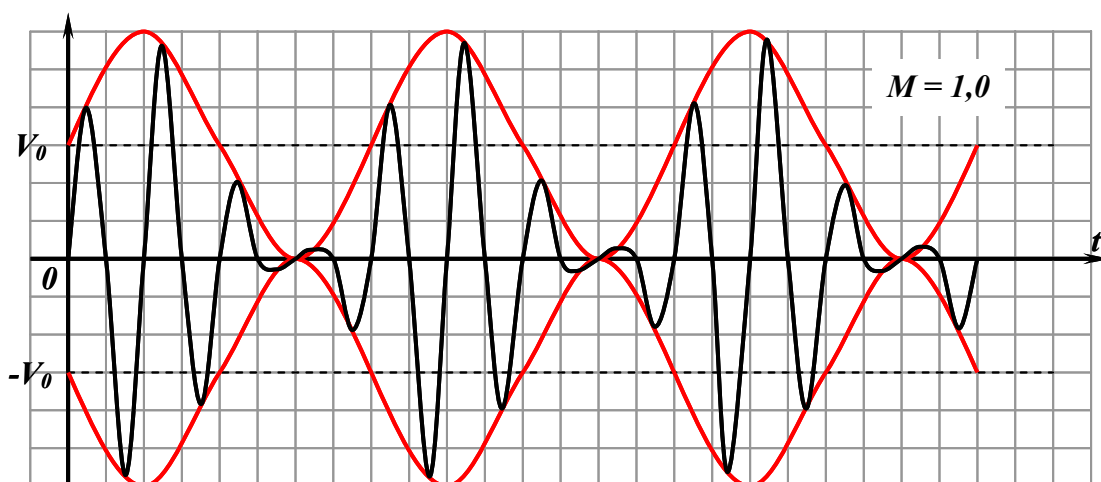
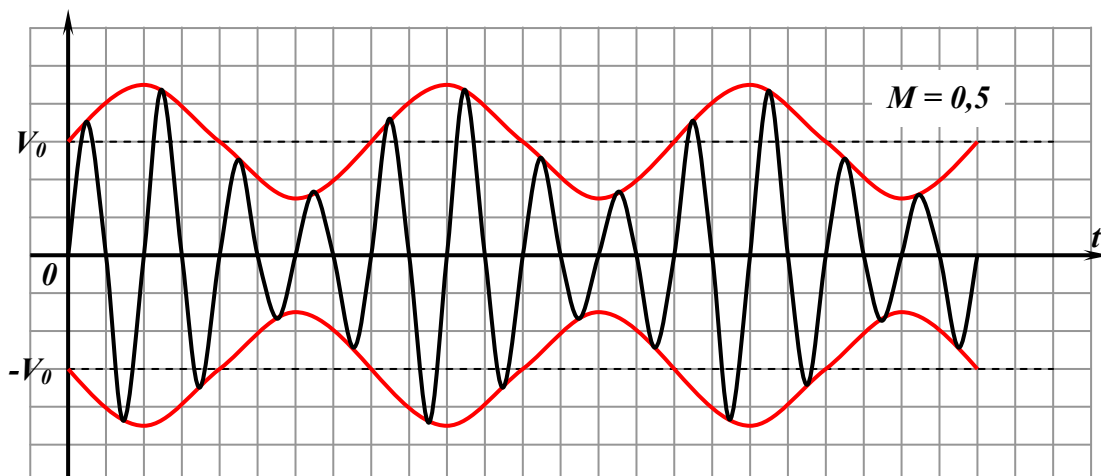
где V_m – амплитуда модуляции.

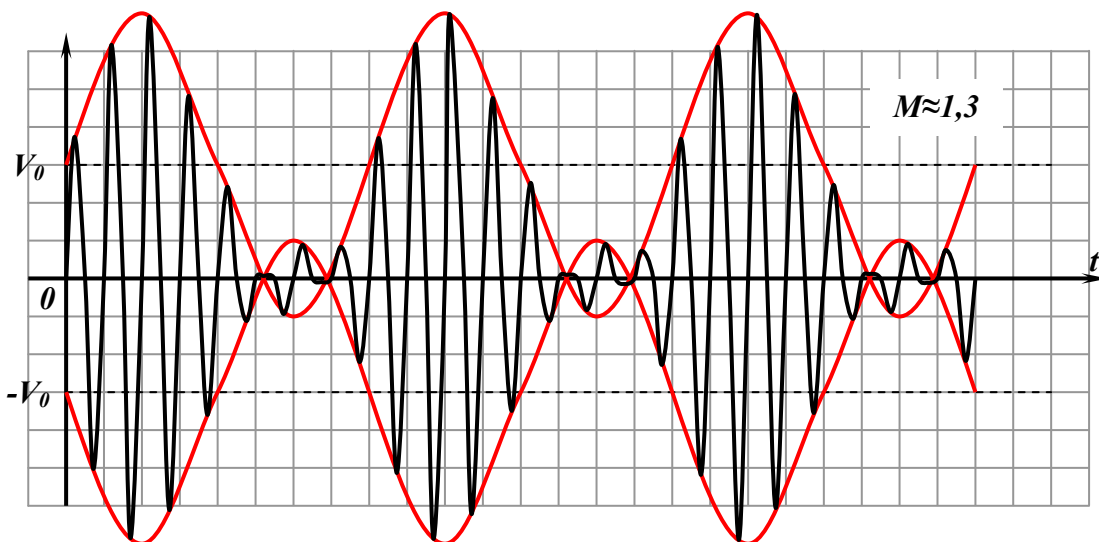
$$V(t) = V_0 + kV_m \cos \Omega t$$

$$U(t) = V_0(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

где $M = \frac{kV_m}{V_0}$ – коэффициент амплитудной модуляции.

$M \leq 1$ – условие для неискаженной модуляции. Если $M > 1$, то это явление называется перемодуляцией. Далее показаны примеры АМ при различных коэффициентах M .





Из этого рисунка видно, что модулирующий сигнал при $M=1,3$ не является синусоидой (или косинусоидой), а это свидетельствует о том, что он искажен.

Спектр сигнала при тональной амплитудной модуляции

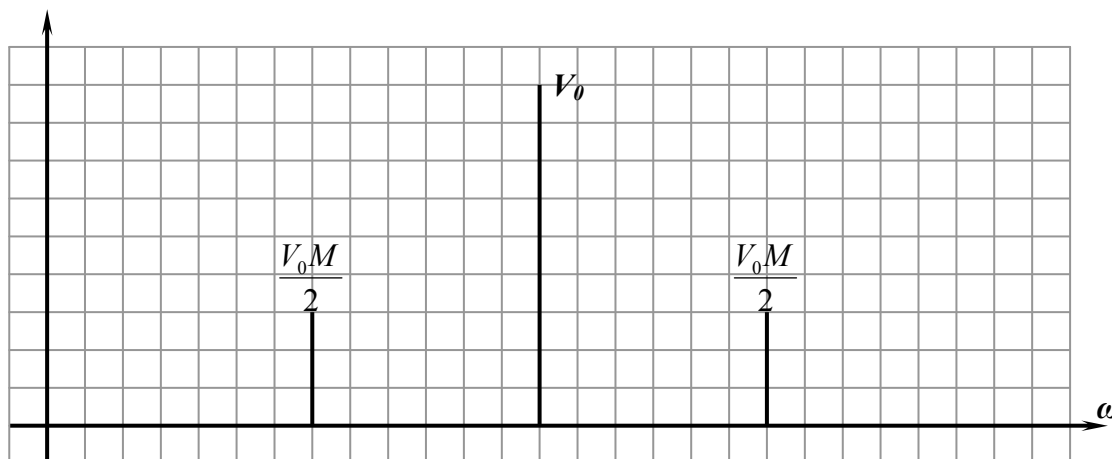
Для того, чтобы определить спектр сигнала, его надо разложить на гармонические составляющие:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= V_0(1 + M \cdot \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t = V_0 \cdot \cos \omega_0 t + V_0 \cdot M \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega_0 t = \\
 &= V_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0 M}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{V_0 M}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t
 \end{aligned}$$

Несущая частота	Верхняя боковая составляющая	Нижняя боковая составляющая
-----------------	------------------------------	-----------------------------

Как видно из данного выражения и пояснения к нему, при ТАМ спектр сигнала состоит из трех гармонических сигналов.

График амплитудного спектра симметричен относительно несущей:



$\Delta\omega_c = 2\Omega$ - ширина спектра

Так как $\Omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{2\Omega}{\omega_0} \ll 1$, сигнал узкополосный.

Энергетические соотношения сигнала при ТАМ

Сигнал состоит из трех гармонических колебаний, и его энергетическая характеристика определяется средней мощностью трех гармонических колебаний:

$$P = P_0 + 2P_B; \quad P_0 = \frac{V_0^2}{2}; \quad P_B = \frac{1}{2} \left(\frac{V_0 M}{2} \right)^2,$$

$$P = \frac{V_0^2}{2} + \left(\frac{V_0 M}{2} \right)^2 = \frac{V_0^2}{2} + \frac{V_0^2 M^2}{4} = P_0 \cdot (1 + 0,5M^2).$$

Как видно из данного выражения, на боковые составляющие, в которых и содержится полезная информация, приходится всего $0,5M^2$ мощности. Это значит, что при передаче АМ - сигнала основная мощность передатчика расходуется на передачу несущего колебания, которое не несет никакой информации, а для передачи сообщения используется только малая мощность передатчика.

ВЫВОД: Энергетические соотношения АМ сигнала неудовлетворительные.

Многотональная амплитудная модуляция

В действительности, сообщение имеет сложный спектр и представляется в виде

$$s(t) = \sum_{n=1}^N V_n \cdot \cos(\Omega_n t + Q_n),$$

где V_n – амплитуды,

Ω_n – частоты. Условие для частот: $\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \dots < \Omega_N \ll \omega_0$.

$$V(t) = V_0 + \sum_{n=1}^N V_n \cdot \cos(\Omega_n t + Q_n) - \text{огибающая,}$$

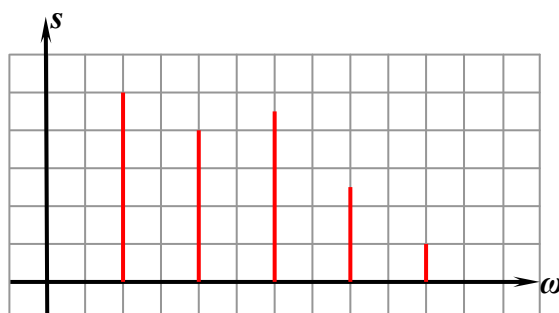
$$U(t) = V_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N M_n \cdot \cos(\Omega_n t + Q_n) \right] \cos \omega_0 t.$$

Определим спектр. Спектр определяем так же, как и при тональной АМ:

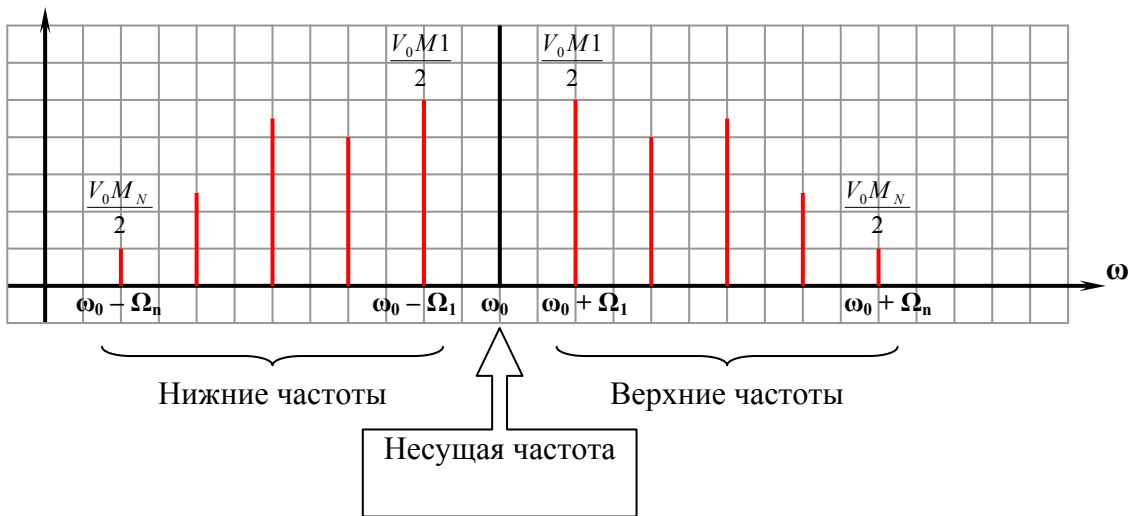
$$U(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{N_0}{2} \sum_{n=1}^N M_0 \cos[(\omega_0 + \Omega_n)t + Q_n] + \frac{V_0}{2} \sum_{n=1}^N M_n \cos[(\omega_0 - \Omega_n)t - Q_n],$$

где $M_n = \frac{V_n}{V_0}$, а V_n и V_0 - парциальные коэффициенты амплитудной модуляции.

Спектр низкочастотного сигнала



Спектр модулированного сигнала



Спектр сигнала при многотональной амплитудной модуляции отличается тем, что вместо двух боковых составляющих имеем боковые полосы по обе стороны от несущей. Верхняя боковая полоса имеет спектр, который точно повторяет спектр низкочастотного сигнала, а нижняя боковая составляющая зеркально отображена относительно несущей частоты. Каждая из боковых полос содержит одну и ту же информацию, что свидетельствует об избыточности передачи информации двумя боковыми полосами.

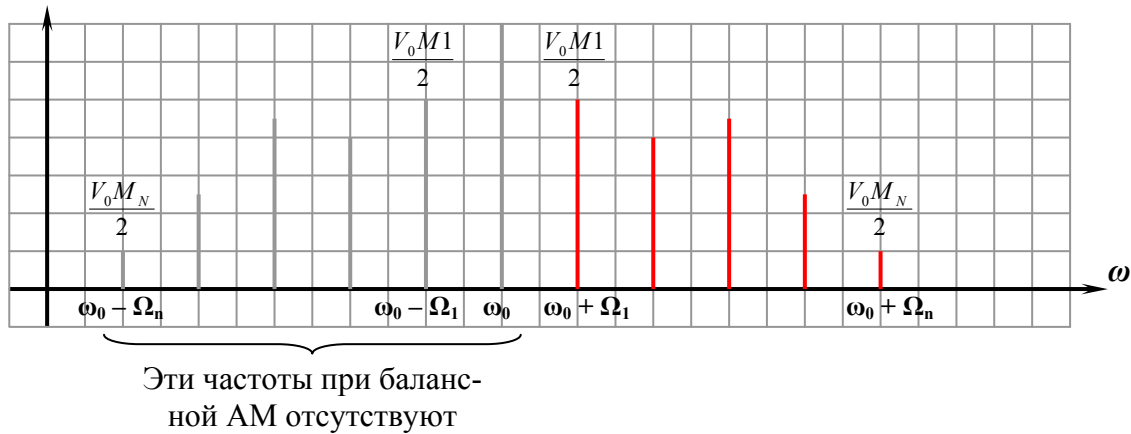
Ширина спектра $\Delta\omega$ равна $2\Omega_N$. Полосу частот, занимаемую АМ - сигналом, можно уменьшить вдвое, если для передачи сообщения использовать одну боковую полосу (есть такое понятие в любительской радиосвязи – передача одной боковой полосой). При этом можно использовать как верхнюю, так и нижнюю боковую полосу. Такой вид амплитудной модуляции называют однополосным. При однополосной передаче в заданном диапазоне частот располагается в два раза больше информационных каналов, чем при двухполосной передаче.

Энергетические соотношения определяются по выражениям

$$P = P_0 + 2 \sum_{n=1}^N P_{БП},$$

$$P = P_0 \left(1 + 0,5 \sum_{n=1}^N M_n^2 \right) - \text{основная частота.}$$

Для улучшения энергетической характеристики используют балансную АМ с подавленной несущей.

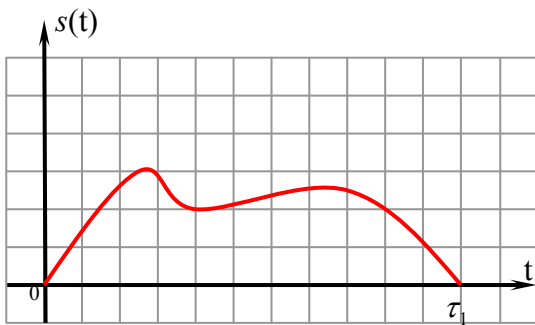


Амплитудная модуляция довольно неустойчива к воздействию помех.

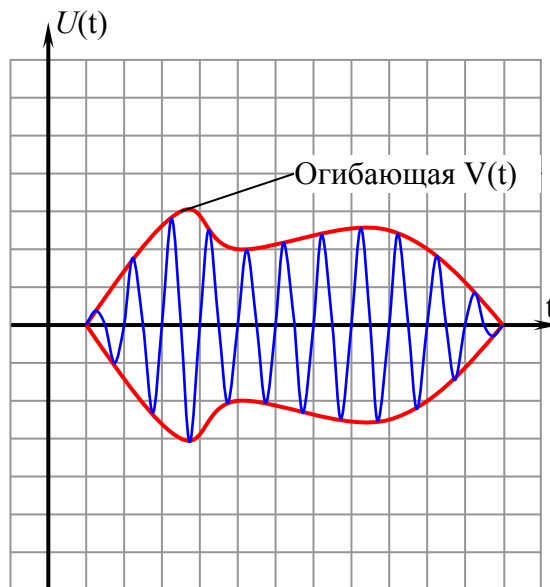
Радиоимпульс

Радиоимпульс – это высокочастотное колебание конечной длительностью, огибающая которого является видеоимпульсом. Радиоимпульс можно считать разновидностью АМ - сигналов.

Низкочастотный видеоимпульс



Радиоимпульс



$$V(t) = k s(t),$$

тогда $U(t) = V(t) \cos \omega_0 t$, $0 \leq t \leq \tau_H$, т. е. радиоимпульс должен быть конечным, что всегда выполняется в реальных условиях. Радиоимпульсы очень широко используются в радиотехнике.

Спектр радиоимпульса

Спектр радиоимпульса описывается спектральной плотностью, т. е. это непрерывный спектр. Это значит, что для получения спектра радиоимпульсов необходимо использовать интегральные преобразования Фурье. Радиоимпульс – непериодический сигнал.

Пусть $s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$, где $\dot{S}(\omega)$ - спектральная плотность видеоимпульса.

$$U(t) = V(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} V(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} V(t) e^{-i\omega_0 t},$$

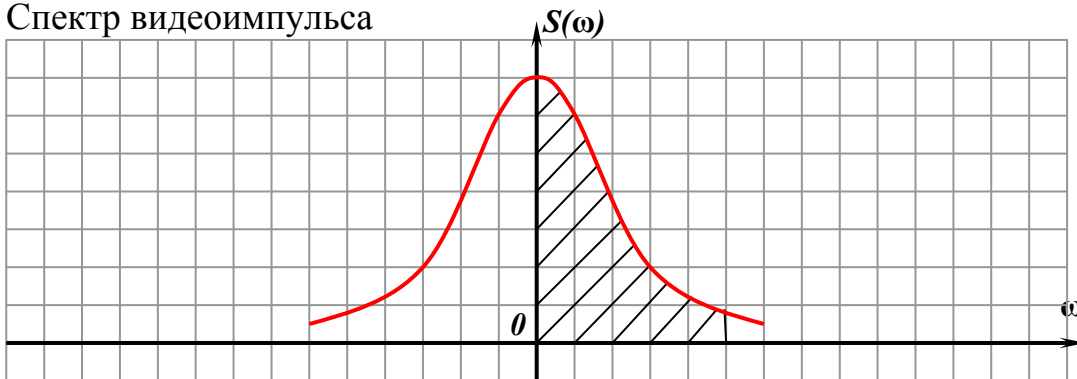
$$U(t) = \frac{k}{2} s(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{k}{2} s(t) e^{-i\omega_0 t}.$$

Для того, чтобы найти спектр радиоимпульса, применим к этому выражению преобразование Фурье: $U(t) \leftrightarrow S_U(\omega)$. Используем свойство линейности и получим основную формулу амплитудной модуляции:

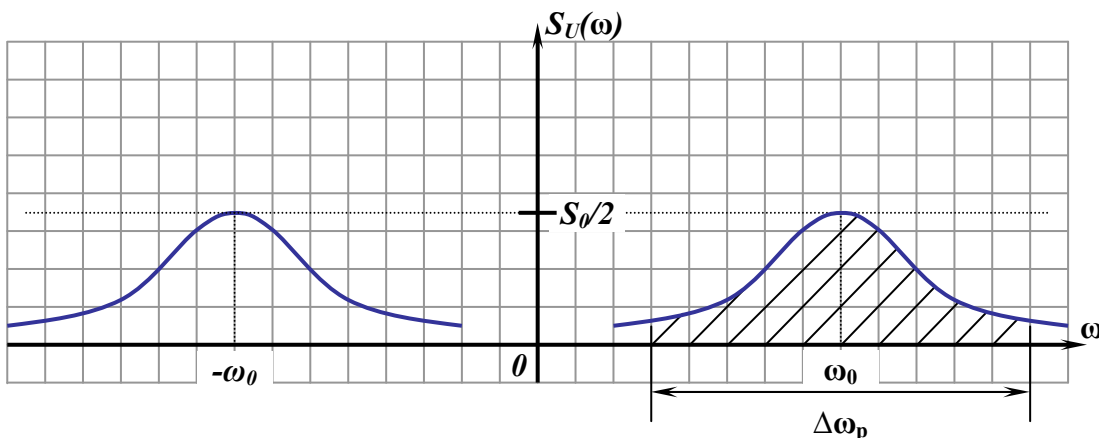
$$\dot{S}_U(\omega) = \frac{k}{2} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{k}{2} \dot{S}(\omega + \omega_0).$$

Эта формула устанавливает связь между спектром радиоимпульса и спектром видеоимпульса.

Спектр видеоимпульса



Спектр радиоимпульса (в данном случае $k = 1$)

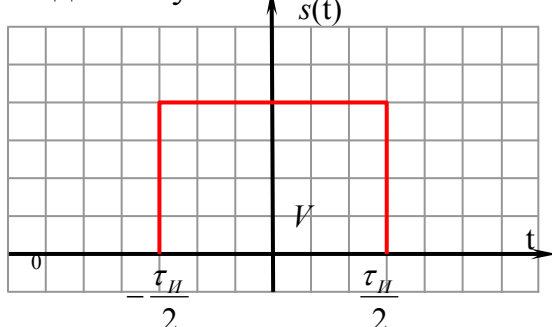


Штриховкой показана физически возможная частота (отрицательных частот не бывает). Для того чтобы определить спектр радиоимпульса, достаточно сместить по оси частот спектр видеоимпульса (оггибающую радиоимпульса) в область частот $\pm \omega_0$. Как правило, частота заполнения $\omega_0 \gg 0$.

$$\dot{S}_U(\omega) = \frac{1}{2} \dot{S}(\omega - \omega_0).$$

Данная формула дана только для области положительных частот. $\Delta\omega_p = 2\Delta\omega_B$, т. е. равна удвоенной ширине видеоимпульса. При АМ происходит смещение (перенос) спектра модулирующего сигнала в область несущей частоты без изменения формы видеосигнала.

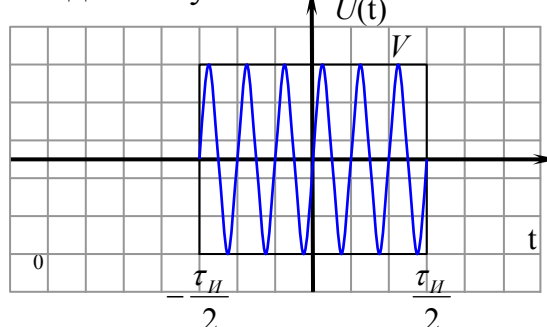
Видеоимпульс



Описывается: V, τ_H .

где ω_0 – частота заполнения.

Радиоимпульс



Описывается: V, τ_H, ω_0 ,

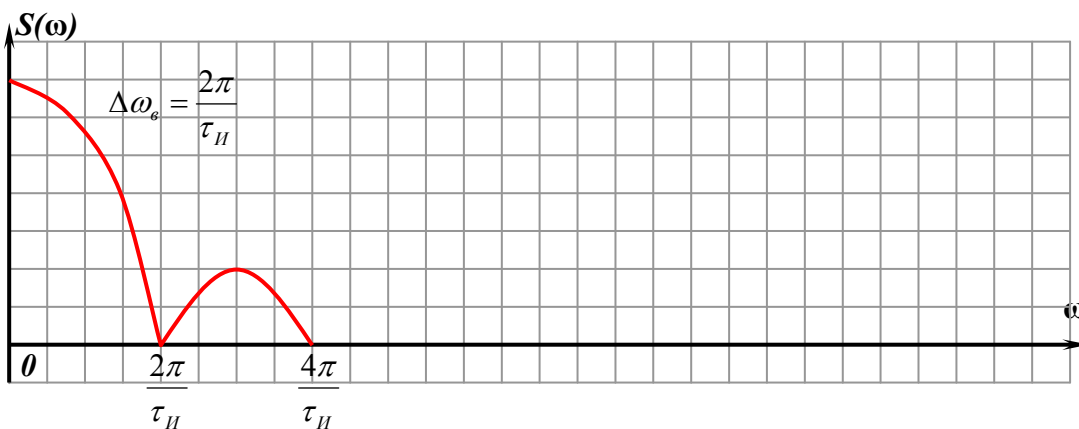
Спектральная плотность видеоимпульса

$$\dot{S}(\omega) = V\tau_H \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_H}{2}\right).$$

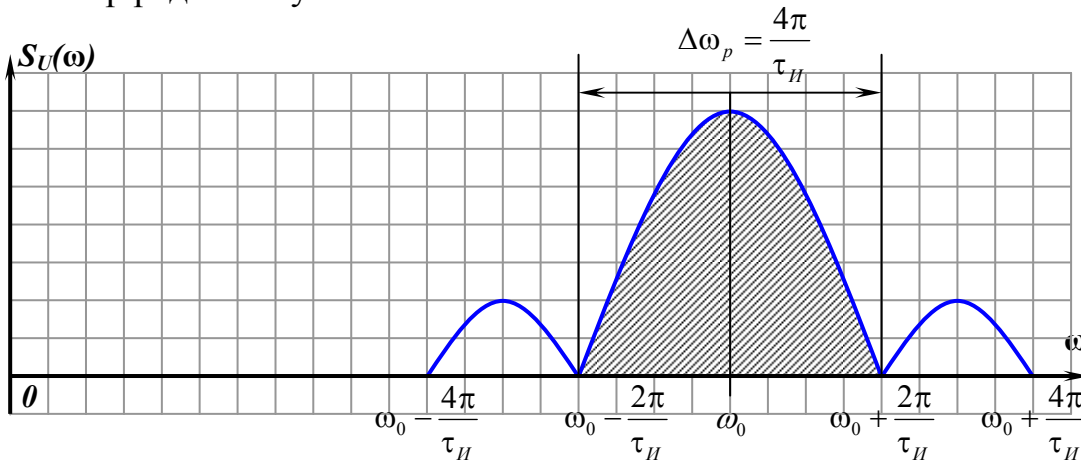
Спектральная плотность радиоимпульса

$$S_U = \frac{1}{2} V\tau_H \text{sinc}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau_H}{2}\right] + \frac{1}{2} V\tau_H \text{sinc}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau_H}{2}\right].$$

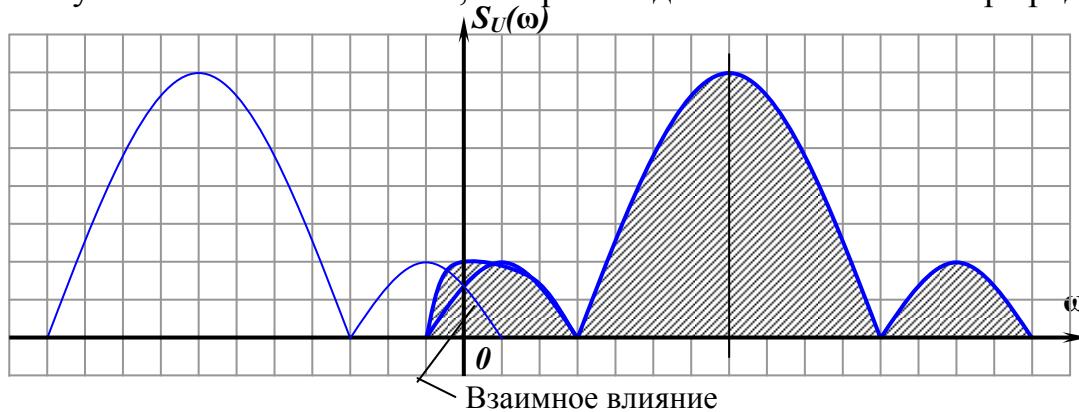
Спектр видеоимпульса



Спектр радиоимпульса



Напомним, что все вышеописанное выполняется только в случае $\omega_0 \gg 0$. Если условие не выполняется, то происходит искажение спектра радиоимпульса:



То есть происходит обрезка спектра, как на графике. Спектр описывается в главной форме двумя слагаемыми, и в данном случае форма спектра радиоимпульса в области положительных частот будет отличаться от формы спектра видеоимпульса.

2.2. Временное и спектральное представления сигналов с угловой модуляцией

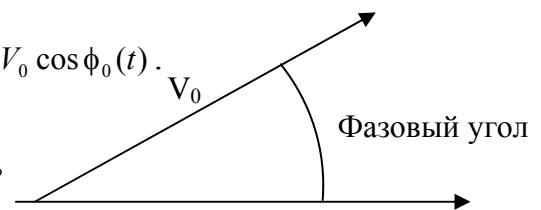
Угловая модуляция – это такой вид модуляции, когда модулирующий сигнал воздействует на фазовый угол несущего колебания. Амплитуда остается постоянной.

$$U_H(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = V_0 \cos \varphi_0(t).$$

Основные параметры (переменные): V_0 ; ω_0 ; φ_0 .

$\varphi_0 = \omega_0 t + \varphi$ - фазовый угол несущего колебания,

$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = \omega_0$ - угловая частота, или угловая скорость,



вектор вращается против часовой стрелки со скоростью ω_0 . При угловой модуляции общий вид колебания такой:

$$U(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = V_0 \cos \phi(t).$$

$\phi(t)$ изменяется нелинейно, как при АМ, а по более сложному закону

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega(t),$$

где $\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ - приращение,

$$\phi(t) = \int \omega(t) dt.$$

Различают два вида угловой модуляции:

- фазовую модуляцию (ФМ),
- частотную модуляцию (ЧМ).

При фазовой модуляции модулируемый сигнал воздействует непосредственно на начальную фазу ВЧ - колебания:

$$\varphi(t) = k s(t),$$

тогда колебания при фазовой модуляции могут быть выражены как

$$U_{\text{ФМ}}(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + k s(t)].$$

Зачастую ω_0 принимают равной нулю. Но при этом будет меняться частота:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \frac{ds(t)}{dt}.$$

При частотной модуляции мгновенная частота колебаний изменяется по закону модулирующего сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 k s(t),$$

при этом будет меняться фаза:

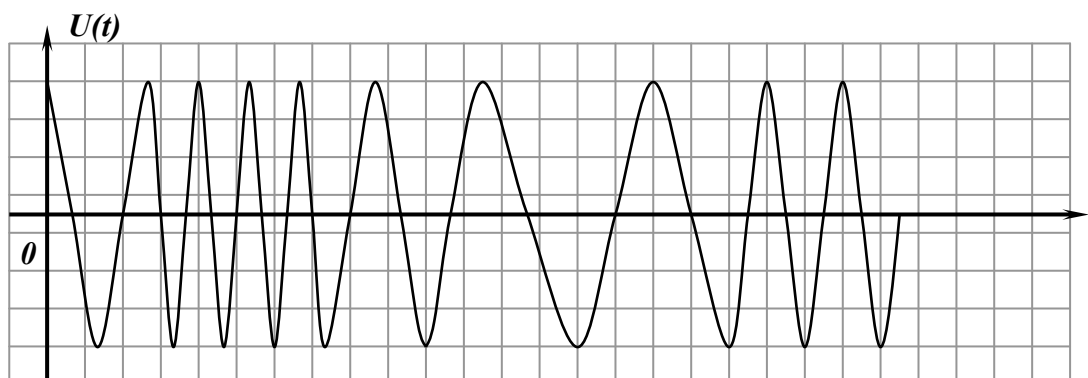
$$\phi(t) = \omega_0 t + k \int s(t) dt,$$

т. е. фаза меняется по интегралу от модулирующего сигнала:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = V_0 \cos\left(\omega_0 t + k \int s(t) dt\right).$$

ВЫВОД. При частотной модуляции и фазовой модуляции изменяются мгновенная частота и начальная фаза сигнала.

Примерный график при угловой модуляции выглядит так:



Тональная угловая модуляция

При тональной модуляции модулирующим сигналом является гармонический сигнал.

$$s(t) = V_m \cos \Omega t \text{ - при ЧМ,}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + kV_m \cos \Omega t \text{ - при ФМ,}$$

где Ωt - частота модуляции (НЧ - сигнал),

kV_m характеризует максимальное отклонение фазы от начальной фазы и называется индексом начальной фазы (фазовой девиацией)

$$m = kV_m = \Delta\varphi,$$

$$\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + kV_m \Omega \sin \Omega t \text{ - мгновенная частота,}$$

$kV_m \Omega$ характеризует максимальное отклонение мгновенной частоты от несущей частоты (девиация частоты).

При фазовой модуляции девиация частоты зависит как от амплитуды модулирующего НЧ - колебания, так и от его частоты.

$$\omega_\delta = k \cdot V_m \Omega,$$

$$U_{\text{ФМ}}(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \cdot \cos \Omega t + \varphi_0) \text{ - при фазовой модуляции,}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + kV_m \cos \Omega t \text{ - при частотной модуляции,}$$

$$\omega_\delta = kV_m \Omega \text{ - девиация частоты,}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{kV_m}{\Omega} \sin \Omega t + \varphi_0 \text{ - полная фаза (при частотной модуляции),}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{kV_m}{\Omega} \sin \Omega t,$$

$$m = \frac{kV_m}{\Omega} = \Delta\varphi, \text{ т. е. } m \text{ зависит и от амплитуды, и от частоты.}$$

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = V_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t] \text{ - при тонально-частотной модуляции.}$$

ВЫВОД. Частотная модуляция (ЧМ) и фазовая модуляция (ФМ) отличаются только в различной зависимости индексов модуляции (m) от параметров модулирующего сигнала.

- При ФМ m зависит только от амплитуды НЧ – сигнала.
- При ЧМ m зависит от амплитуды и от частоты модулирующего сигнала.

При ФМ

$$m = kV_m; \quad \omega_\delta = kV_m \Omega.$$

При ЧМ

$$m = \frac{kV_m}{\Omega}; \quad \omega_\delta = kV_m.$$

Спектр сигнала при тонально-угловой модуляции

При тонально-угловой модуляции можно использовать одно и то же аналитическое выражение и для ФМ, и для ЧМ:

$$U(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t).$$

Для того, чтобы найти спектр, необходимо представить это выражение в виде суммы гармонических составляющих с различными амплитудами и частотами (приводится готовое выражение без вывода, энтузиасты могут сделать вывод самостоятельно через тригонометрию):

$$U(t) = \underbrace{V_0 I_0(m)}_1 \cos \omega_0 t + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} I_n(m) \cdot \cos(\omega_0 + n\Omega)t}_{\omega_n \text{ верхн.бок.}} + V_0 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(m) \cdot \cos(\omega_0 - n\Omega)t}_3,$$

где $I_n(m)$ - функция Бесселя аргумента m и порядка n ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$).

Эта формула и есть спектральное представление сигнала с тонально-угловой модуляцией.

1 – Несущее колебание, его амплитуда A_0

$$A_0 = V_0 I_0(m).$$

2 – Сумма верхних боковых составляющих

$$A_n = V_0 I_n(m),$$

$$\omega_{\text{н.б.}} = \omega_0 + n\Omega.$$

3 – Сумма нижних боковых составляющих

$$A_n = V_0 I_n(m).$$

Так как $(-1)^n \rightarrow$, будет $-\pi$, но на амплитуду это не влияет:

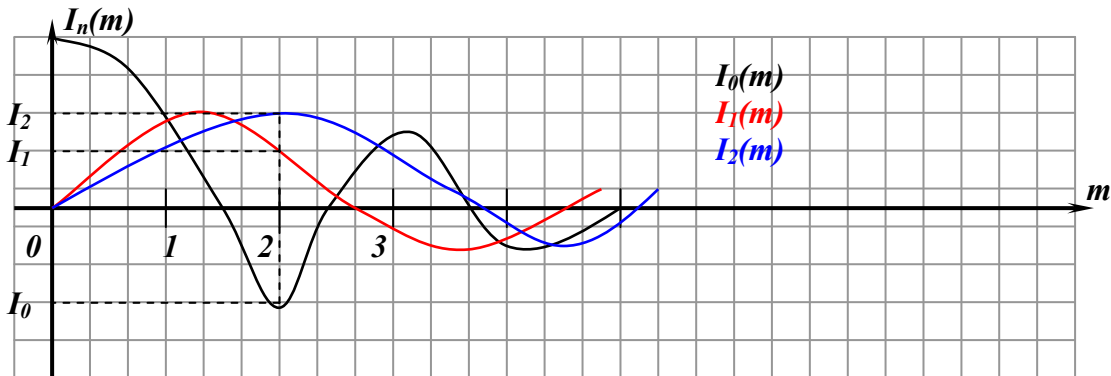
$$\omega_{\text{н.б.}} = \omega_0 - n\Omega.$$

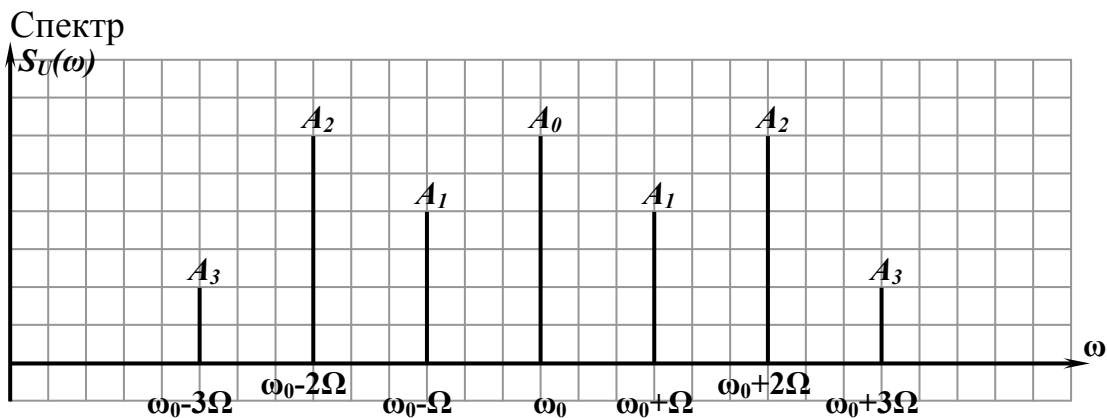
Построение спектра тонально-угловой модуляции

При построении графических изображений спектров тонально-угловой модуляции необходимо использовать функции Бесселя. Они даны в таблицах и в графиках. Графики предпочтительнее.

Предположим, что $V_0 = 3$ В.

Это примерный вид графиков Бесселя





Спектр симметричен относительно ω_0 . Число боковых составляющих бесконечно, но практически с увеличением n оно сильно уменьшается. Учитывают те составляющие, номера которых $n \leq m + 1$.

Практическая ширина спектра равна

$$\Delta\omega_c = 2(m + 1)\Omega.$$

Тонально-угловая модуляция бывает:

- широкополосной при $m \gg 1$,
- узкополосной при $m \ll 1$.

При узкополосной модуляции ширина спектра равна

$$\Delta\omega_c = 2\Omega,$$

при этом

$$I_0(m) \approx 1,$$

$$I_1(m) = \frac{m}{2},$$

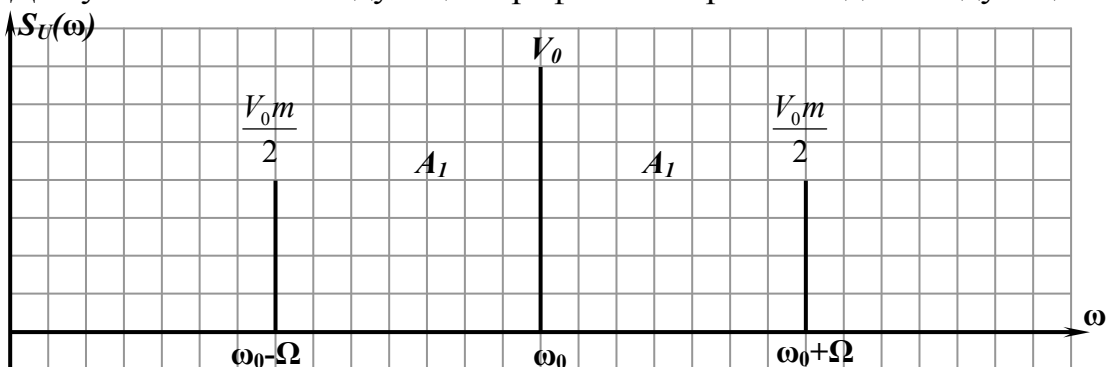
$$I_2(m) = 0, \text{ если } n > 2,$$

$$U(t) = \underbrace{V_0 \cos \omega_0 t}_1 + \underbrace{\frac{V_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)}_2 - \underbrace{\frac{V_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)}_3,$$

1 – несущая,

2, 3 – боковые.

Для узкополосной модуляции график спектра выглядит следующим образом.



Чтобы отличить фазовую модуляцию (ФМ) от частотной модуляции (ЧМ), необходимо изменить m (индекс начальной фазы):

- при ФМ изменится расстояние Ω (см. график), но не амплитуда;
- при ЧМ изменятся и расстояние Ω , и амплитуда.

Энергетические характеристики сигналов УМ

Средняя мощность сигнала равна мощности несущей.

Сравнительные характеристики АМ и УМ сигналов		
Параметр	АМ	ЧМ
Помехоустойчивость	–	+
Ширина спектра	+	–
Энергетические соотношения	–	+

Сигналы с обобщенной модуляцией

Сигналы с обобщенной модуляцией – это сигналы с одновременным использованием амплитудно-модулированных и частотно-модулированных сигналов.

$$U(t) = \underbrace{U(t)}_{\text{Амплитуда}} \cos[\underbrace{\omega_0 t + \varphi(t)}_{\text{Фаза}}]$$

Анализ таких сигналов более сложен, но он упрощается, если использовать понятие **комплексной огибающей сигнала**.

Представим выражение

$$U(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

в виде комплексной величины:

$$U(t) = \operatorname{Re} \left[\underbrace{\tilde{U}(t)}_1 \underbrace{e^{i\omega_0 t}}_2 \right]$$

$$\tilde{U}(t) = U(t) e^{i\varphi(t)} - \text{комплексная огибающая сигнала,}$$

где $U(t)$ - амплитуда, $\varphi(t)$ - фаза,

т. е. $\tilde{U}(t)$ содержит информацию о законах изменения амплитуды и фазового угла. Эта запись возможна только тогда, когда 1 изменяется намного медленнее, чем 2. Это достигается, если частота модулирующего сигнала намного меньше несущей частоты, т. е. понятие комплексной огибающей можно использовать только для узкополосных сигналов.

Введем понятие спектральной плотности комплексной огибающей:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Выразим спектральную плотность модулированного сигнала:

$$\tilde{S}_U(\omega) = \int \operatorname{Re}[\tilde{U}(t) e^{i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt,$$

в данной формуле выражение $\operatorname{Re}[\tilde{U}(t) e^{i\omega_0 t}]$ описывает $U(t)$.

Пусть $Z = \tilde{U}(t) e^{i\omega_0 t}$, тогда, зная формулу $\operatorname{Re} Z = \frac{\dot{Z} + \dot{Z}^*}{2}$,

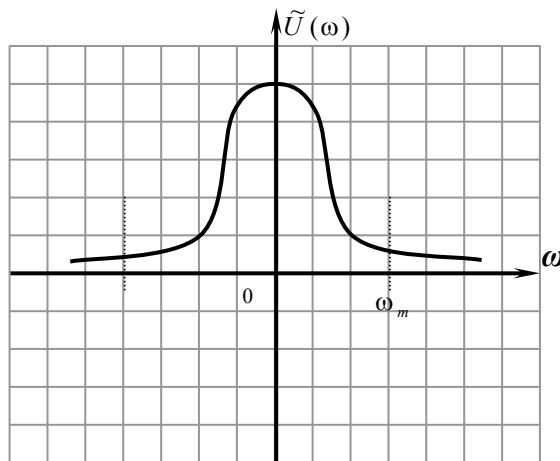
получим

$$\dot{S}_U(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{U}(t) e^{i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{U}^*(t) e^{-i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt.$$

В данной формуле первый интеграл - это $\tilde{U}(\omega - \omega_0)$, а второй - $\tilde{U}^*(-\omega - \omega_0)$, получаем

$$\dot{S}_U(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{U}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \tilde{U}^*(-\omega - \omega_0).$$

Эта формула устанавливает связь между спектром модулированного сигнала и спектром его комплексной огибающей. Отсюда следует, что для определения спектра с обобщенной модуляцией достаточно найти спектральную плотность его комплексной огибающей и осуществить перенос ее из области частот $\omega - \omega_0$ в область частот $-\omega - \omega_0$. Причем при $\omega < 0$ выполняется также операция комплексного сопряжения.



ω_m - максимальная частота спектра комплексной огибающей. Если $\omega_m \ll \omega_0$ (т. е. сигнал узкополосный), то тогда в области положительных частот можно использовать только первое слагаемое:

$$\dot{S}_U(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{U}(t) e^{i\omega_0 t}] e^{-i\omega t} dt.$$

Тогда ширина спектра модулированного сигнала равна

$$\Delta\omega_c = 2\omega_m.$$

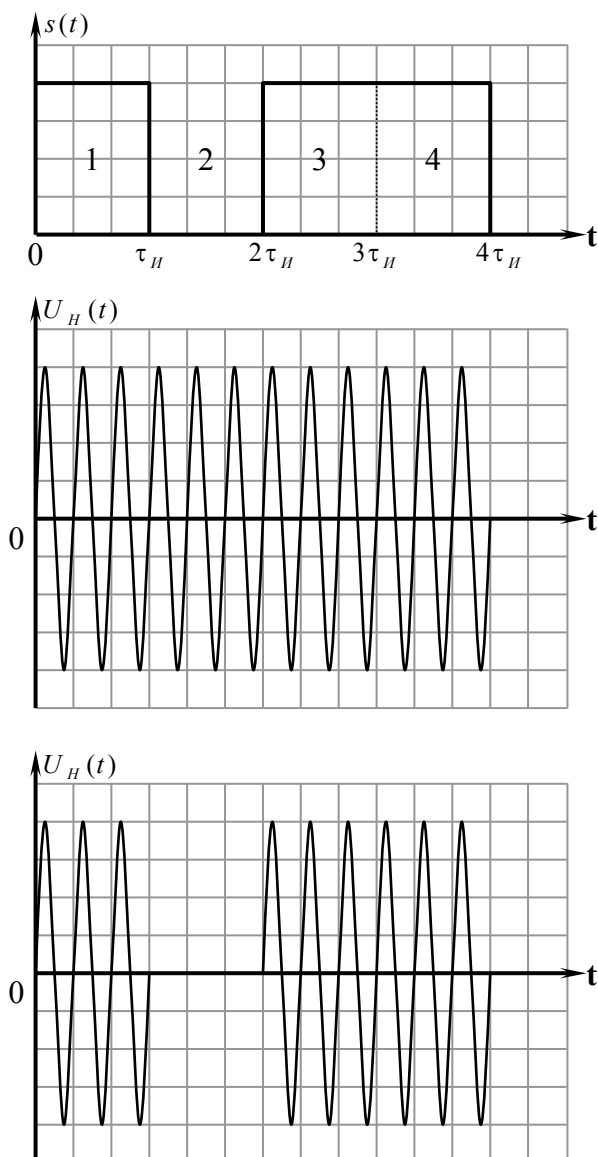
Примером таких сигналов может служить радиолокационный сигнал с частотной модуляцией.

2.3. Разновидности модулированных сигналов

Манипуляция – это вид модуляции, при которой модулируемый параметр изменяется не плавно, а скачкообразно соответственно скачкообразному изменению модулирующего сигнала. Таким модулирующим сигналом может служить сигнал, отображающий двоичный код. В зависимости от того, какой из трех параметров (напряжение, фаза или частота) гармонического несущего колебания изменяется, различают три основных вида манипуляции (цифровой модуляции – ЦМ):

- амплитудную ЦМ,
- фазовую ЦМ,
- частотную ЦМ.

Далее показаны графики, иллюстрирующие амплитудно-манипулированный сигнал. На первом графике показан модулирующий сигнал, на втором – несущая частота, на третьем – модулированный сигнал.



Как видно из последнего графика, модулированный по амплитуде цифровой сигнал – это радиоимпульс (серия радиоимпульсов):

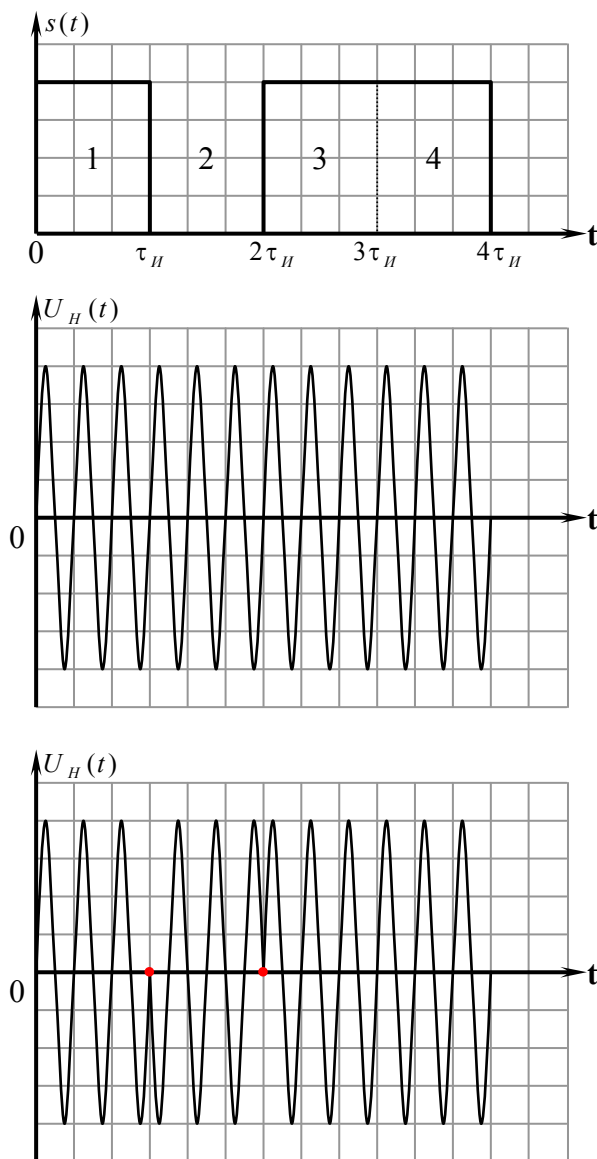
$$s_1(t) = 1 \Rightarrow U(t) = V \cos \omega_0 t,$$

$$s_2(t) = 0 \Rightarrow U(t) = 0.$$

Далее показаны графики фазоманипулированного сигнала. На первом графике показан модулирующий сигнал, на втором – несущая частота, на третьем - модулированный сигнал. Будем считать, что в данном случае скачок равен π .

$$U_1(t) = V \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$U_2(t) = -V \cos(\omega_0 t + \varphi).$$



Жирной точкой обозначены места смены фазы. Такой вид модуляции сокращенно обозначают ФМн.

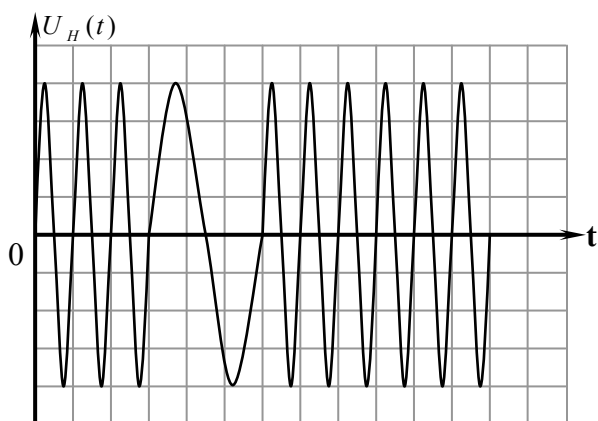
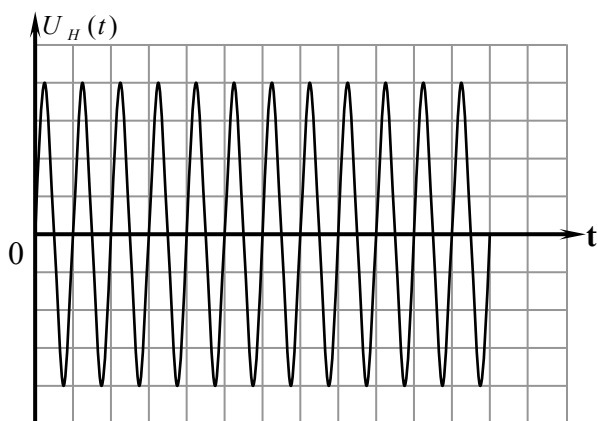
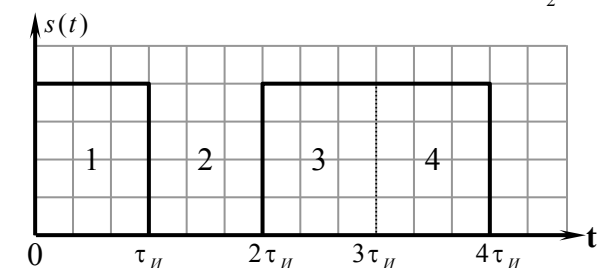
Далее показаны графики частотно-манипулированного сигнала. На первом графике показан модулирующий сигнал, на втором – несущая частота, на третьем – модулированный сигнал.

$$U_1(t) = V \cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$U_2(t) = -V \cos(\omega_2 t + \varphi_0),$$

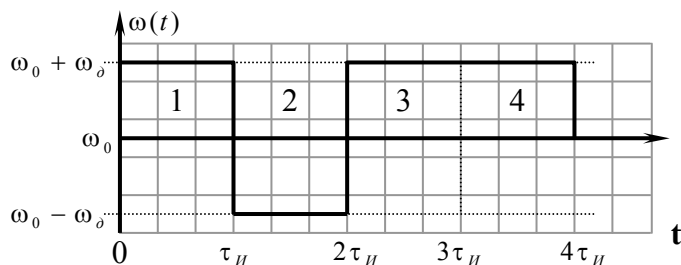
$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_\delta,$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \omega_\delta.$$



Такой вид модуляции сокращенно обозначают ЧМн.

На следующем графике показана зависимость частоты при ЧМн.



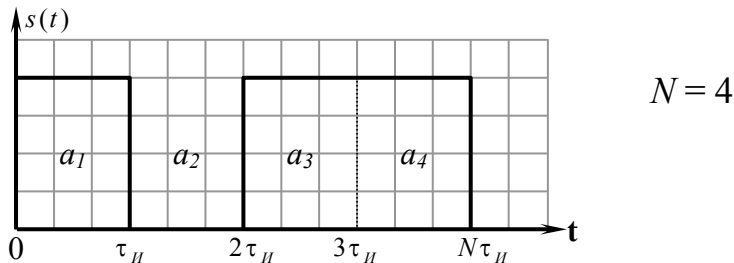
Спектры манипулированных сигналов

Амплитудно-манипулированный сигнал

$$U(t) = V(t) \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq N\tau_{II},$$

где $V(t)$ - огибающая,

$\tau_c = N\tau_{II}$ - длительность всего сигнала. Для рассмотренных выше случаев $N=4$.



Огибающая повторяет модулирующий сигнал:

$$U(t) = k s(t).$$

Далее, пользуясь преобразованиями Фурье, получим

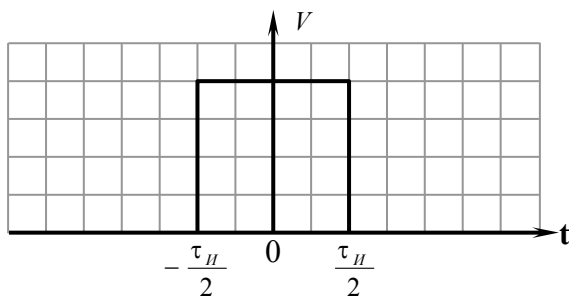
$$\dot{U}(\omega) = \int_0^{N\tau_{II}} U(t) e^{-i\omega t} dt,$$

тогда спектр сигнала можно выразить через формулу

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{U}(\omega - \omega_0), \quad \omega > 0,$$

т. е. спектр огибающей – это спектр цифрового сигнала.

Спектральная плотность прямоугольного импульса



Спектральная плотность этого импульса равна $S_0(\omega)$.

$$V(t) = \sum_{n=1}^N a_n r_n(t),$$

где a_n – кодовая комбинация,

$$\{ a_n \} = a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_N,$$

при этом a_N равно 1 или 0, длина равна N элементам,

$r_n(t)$ описывает прямоугольный импульс:

$$r_1(t) = V, \quad 0 \leq t \leq \tau_{II},$$

$$r_2(t) = V, \quad \tau_{II} \leq t \leq 2\tau_{II}.$$

Через преобразование Фурье

$$U(t) \leftrightarrow \dot{U}(\omega),$$

$$\dot{U}(\omega) = \sum_{n=1}^N a_n \dot{S}_n(\omega),$$

где $\dot{S}_n(\omega) \leftrightarrow r_n(t)$ - спектр прямоугольного импульса,

$$\dot{S}_1(\omega) \leftrightarrow r_1(t),$$

$$\dot{S}_1(\omega) = \dot{S}_0(\omega) e^{-i\omega \frac{\tau_H}{2}} \text{ - теорема об импульсах.}$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) e^{-i\omega \tau_H}.$$

$$\dot{S}_3(\omega) = \dot{S}_2(\omega) e^{-i\omega 2\tau_H} \text{ и т. д.,}$$

отсюда получим

$$\dot{U}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) [a_1 + a_2 e^{-i\omega \tau_H} + a_3 e^{-i2\omega \tau_H} + \dots + a_n e^{-i(n-1)\omega \tau_H}],$$

эту формулу можно переписать в компактном виде:

$$\dot{U}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \sum_{n=1}^N a_n e^{-i(n-1)\omega \tau_H},$$

где $\dot{S}_1(\omega)$ - спектральная плотность первого импульса.

Тогда спектр кодовой последовательности запишется так:

$$\dot{S}_{КОД}(\omega) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-i(n-1)\omega \tau_H}.$$

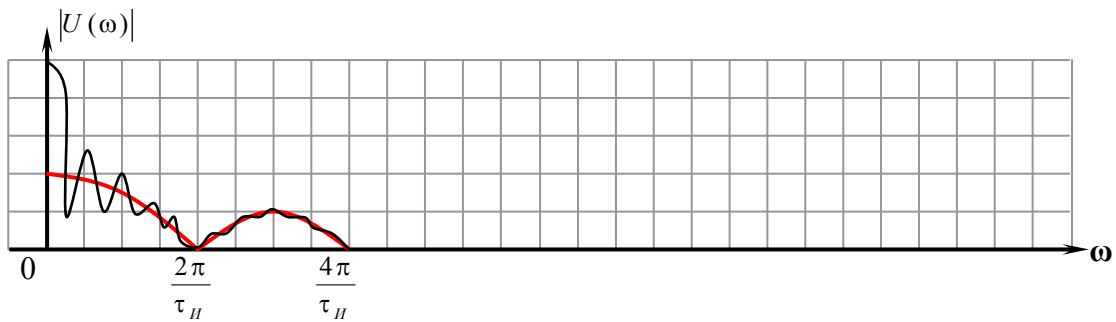
Из этого выражения видно, что спектр кодовой последовательности $\dot{S}_{КОД}(\omega)$ является периодическим спектром с периодом на оси частот, равным $2\pi / \tau_H$.

Спектр огибающей цифрового сигнала запишется так:

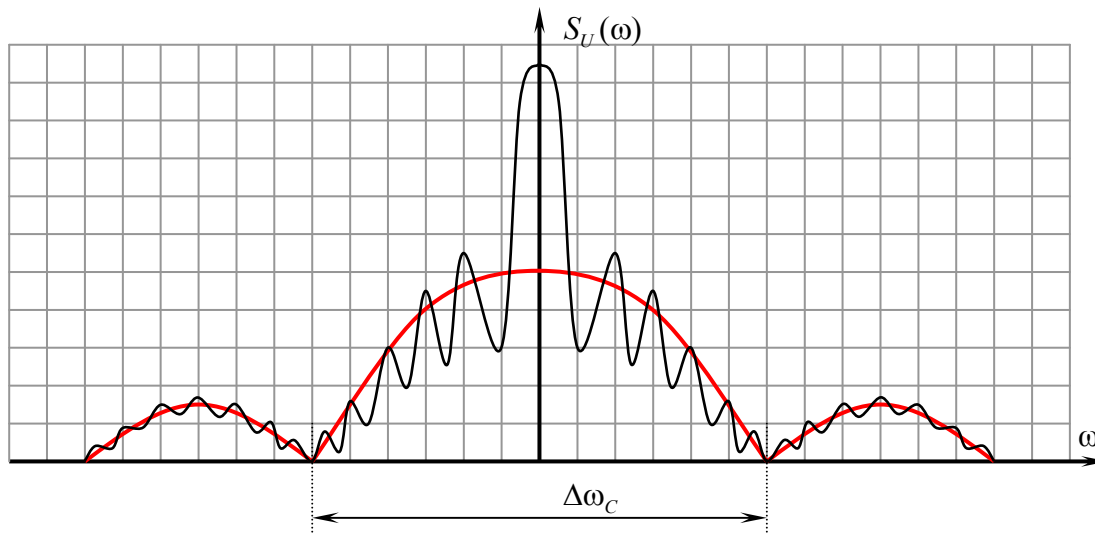
$$\dot{U}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \cdot S_{КОД}(\omega),$$

отсюда следует, что спектр огибающей (цифрового сигнала) является результатом наложения на спектр обычного прямоугольного импульса $\dot{S}_1(\omega)$ спектра кодовой последовательности $S_{КОД}(\omega)$.

На графике показан примерный вид $\dot{U}(\omega)$.



Жирной плавной линией показан спектр одиночного импульса.



$\Delta\omega_c = \frac{4\pi}{\tau_{И}}$ - практическая ширина спектра при Амн. $\Delta\omega_c$ - один из наиболее важных параметров.

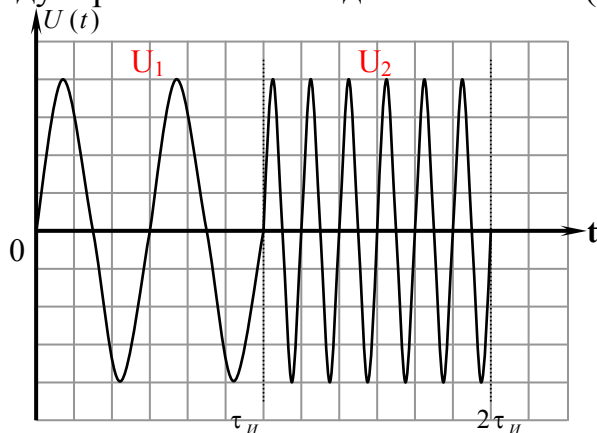
ВЫВОД. $\Delta\omega_c$ зависит от длины импульса.

Для фазовой модуляции (ФМн) почти все выкладки, приведенные выше, идентичны. Наиболее важно то, что при ФМн ширина спектра будет такая же:

$$\Delta\omega_c = \frac{4\pi}{\tau_{И}}.$$

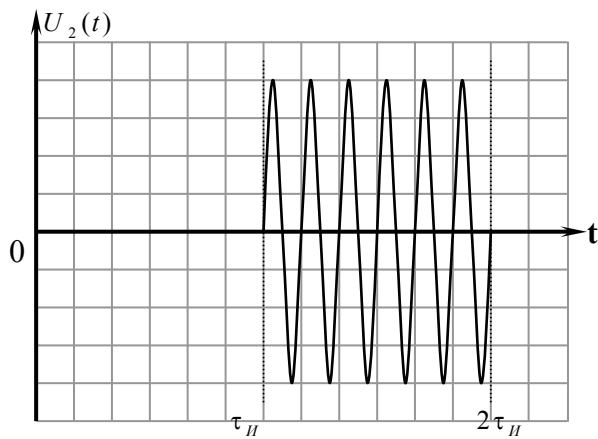
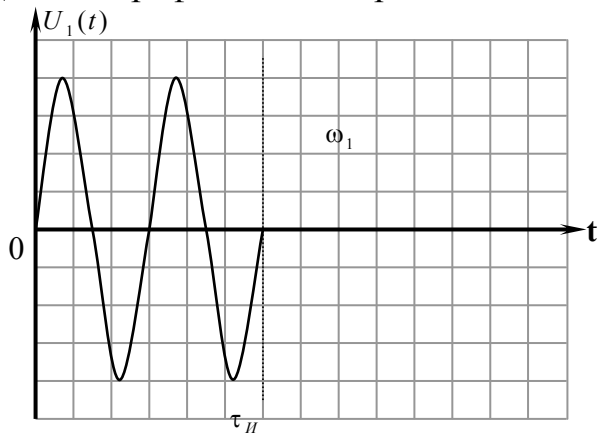
Построим спектр частотно-манипулированного (ЧМн) сигнала.

Для упрощения возьмем длину кодовой последовательности N , равную 2. График модулированной последовательности (0 и 1) показан ниже.

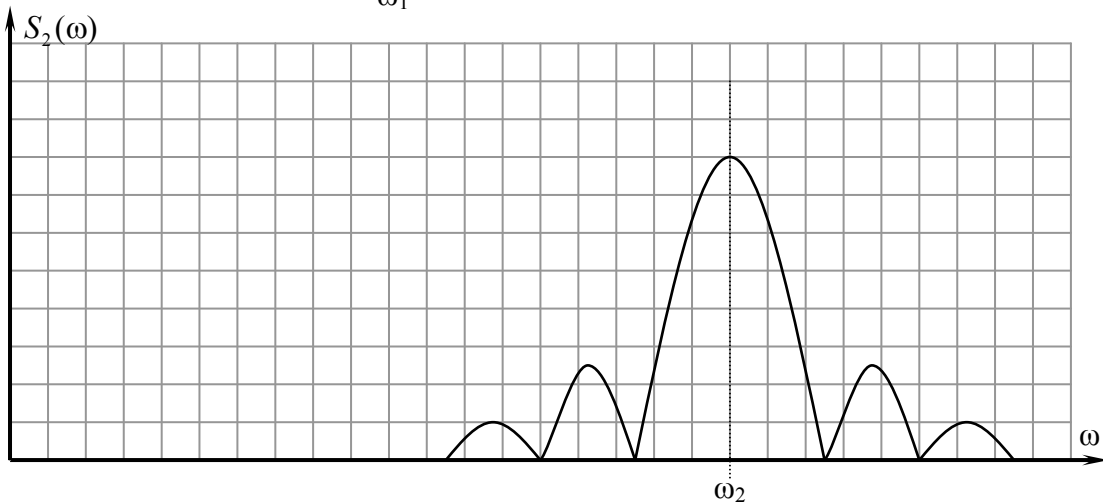
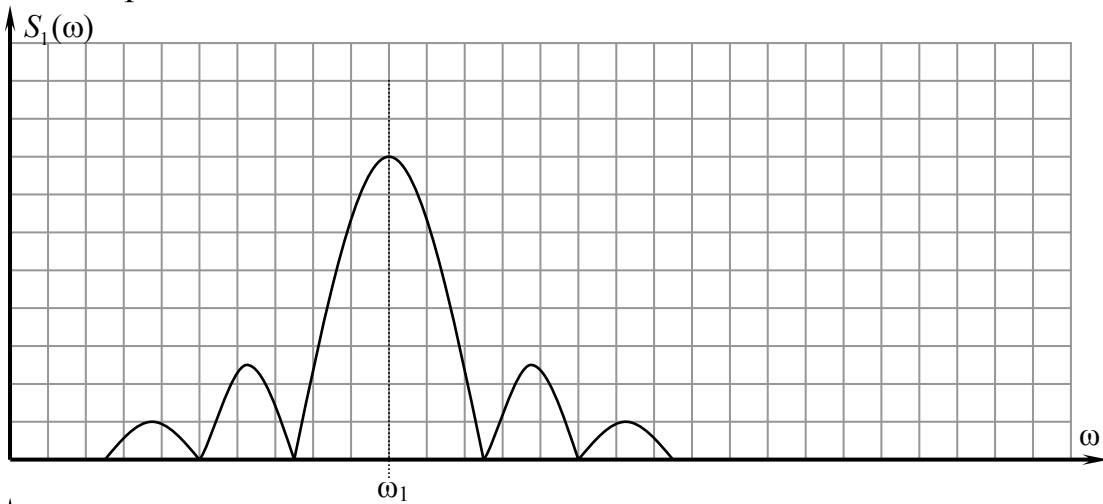


$$U(t) = U_1(t) + U_2(t).$$

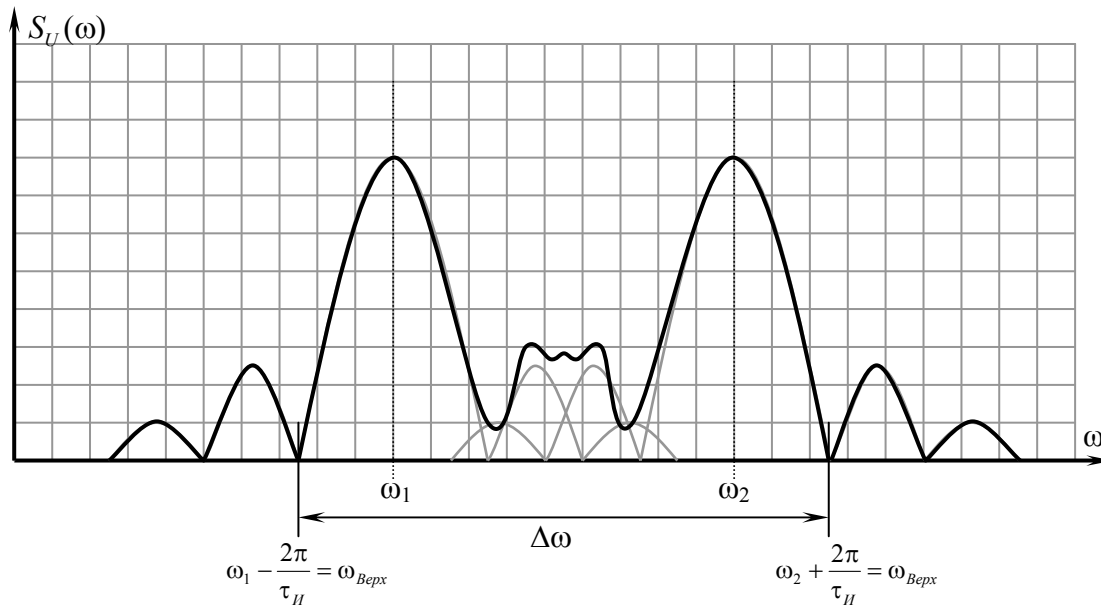
Данный график можно представить в виде двух отдельных графиков:



А их спектры выглядят так.



Если сложить эти два спектра, график будет иметь приблизительно такой вид:



$$\omega_2 = \omega_0 + \omega_d,$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \omega_d,$$

$$\Delta\omega_C = \omega_{Верх} - \omega_{Нижн} = \omega_2 - \omega_1 + \frac{4\pi}{\tau_H} = 2\omega_d + \frac{4\pi}{\tau_H}.$$

Из данной формулы видно, что ширина спектра при частотно-манипулированном (ЧМн) сигнале зависит еще и от девиации частоты.

ВЫВОД. При любом виде манипуляций ширина спектра манипулированного сигнала обратно пропорциональна длительности импульса (τ_H). При передаче цифрового сигнала τ_H - это длительность посылки одного символа двоичного кода, а частоту

$$f_\tau = \frac{1}{\tau_H}$$

называют тактовой частотой. С ней связано такое понятие, как скорость передачи цифровой информации (число переданных двоичных символов – бит за 1 секунду). Например, $f_\tau = 1\text{кГц}$, это означает, что скорость передачи двоичных символов равна 1000 б/с или 1 кб/с. То есть за одну секунду передаются 1000 двоичных символов. Следовательно, чем меньше длительность единичного элемента манипулированного сигнала, тем выше скорость передачи цифровой информации. Однако увеличение скорости передачи цифровой информации приводит к расширению спектра. Основной недостаток манипулированных сигналов – требования к ширине полосы пропускания. И чем выше скорость передачи, тем шире полоса пропускания.

Амплитудно-импульсная манипуляция

В радиотехнике применяют разнообразные виды импульсной модуляции. Импульсная модуляция осуществляется в два этапа.

Первый этап. В качестве несущего колебания используется периодическая последовательность импульсов, обычно прямоугольных.

Несущее колебание:

$$U_H(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT),$$

где $r(t)$ описывает один импульс на интервале

$$-\frac{\tau_H}{2} < t \leq \frac{\tau_H}{2} \quad \text{или} \quad 0 < t < \tau_H.$$

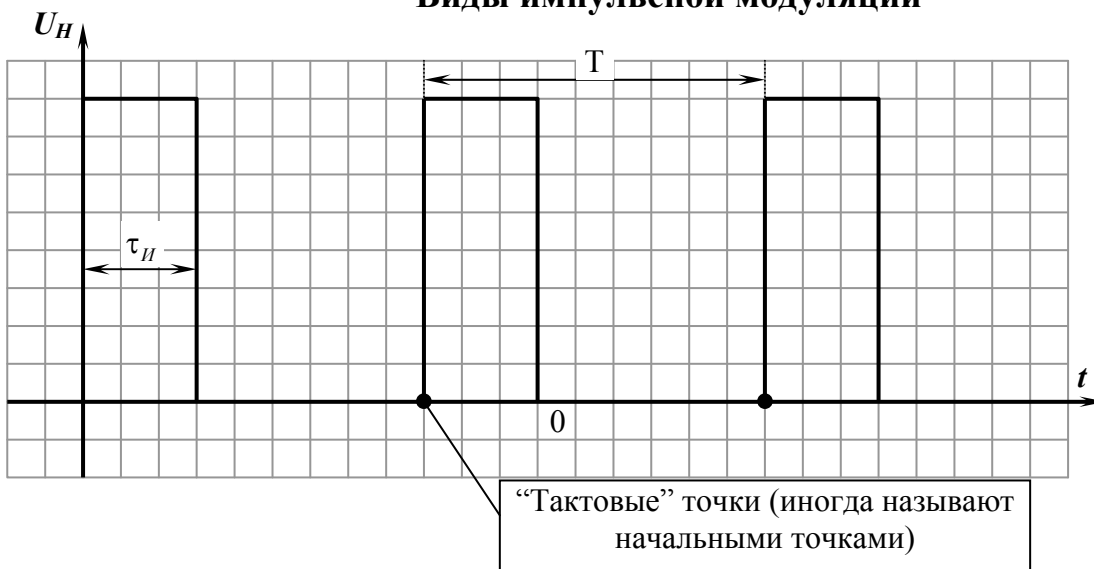
При этом информационный сигнал $s(t)$ является модулирующим сигналом. В результате воздействия сигнала $s(t)$ на один из параметров несущего сигнала образуются видеосигналы с импульсной модуляцией.

Второй этап.

Видеосигналы с импульсной модуляцией являются модулирующими сигналами, а в качестве несущего используется гармоническое колебание. В результате получаются радиоимпульсы с импульсной модуляцией.

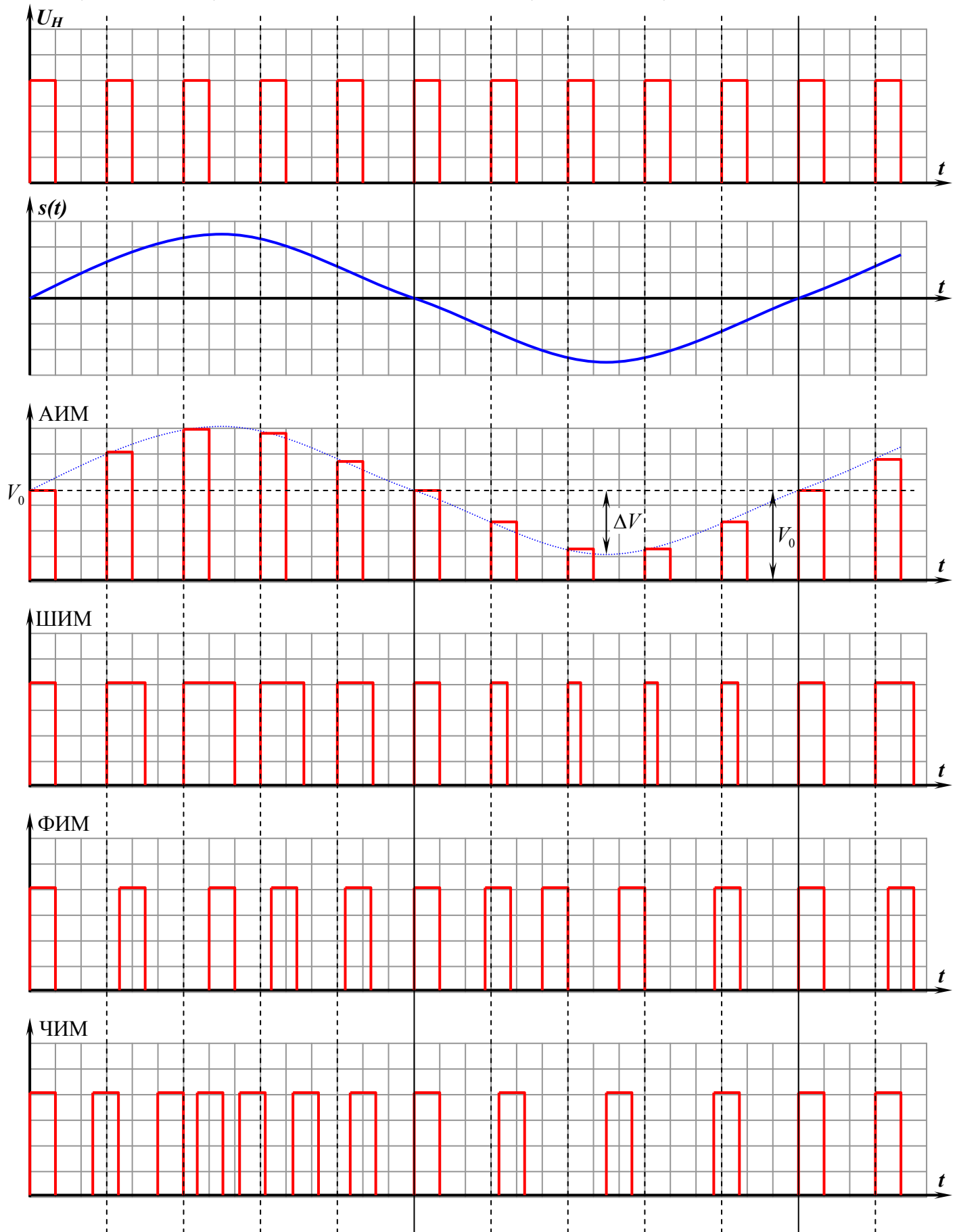
Импульсная модуляция позволяет осуществить временное разделение каналов радиосвязи, т. е. интервалы между соседними импульсами обычно используются для передачи импульсов других каналов.

Виды импульсной модуляции

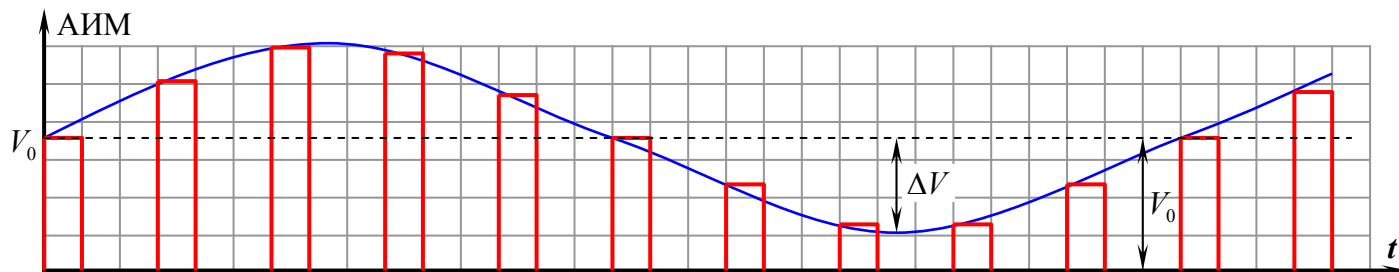


Далее показаны графики нескольких видов модуляции: АИМ – амплитудно-импульсная модуляция, ШИМ – широтно-импульсная модуляция, ФИМ – фазо-

импульсная модуляция, ЧИМ – частотно-импульсная модуляция.



Как видно из графиков, при АИМ меняется амплитуда импульсов, при ШИМ меняется ширина импульсов, при ФИМ меняется фаза импульсов (это выражается в том, что импульсы смещаются относительно тактовых точек), при ЧИМ изменяется частота следования импульсов.



Огибающая изменяется по закону

$$V(t) = V_0 + ks(t),$$

в нашем случае

$$V(t) = V_0 + kV \cos \Omega t = V_0(1 + M \cos \Omega t),$$

где $M = \frac{\Delta V}{V}$ — коэффициент модуляции.

Амплитудная импульсная модуляция

Для изучения основных особенностей импульсной модуляции в качестве примера возьмем сигнал с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ).

$$U_{\text{АИМ}}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Огибающая}}}{V(t)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Несущая}}}{U_H(t)} = V(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kt).$$

Как простейший случай рассмотрим тональную амплитудную импульсную модуляцию (ТАИМ):

$$U(t) = (1 + M \cos \Omega t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kt).$$

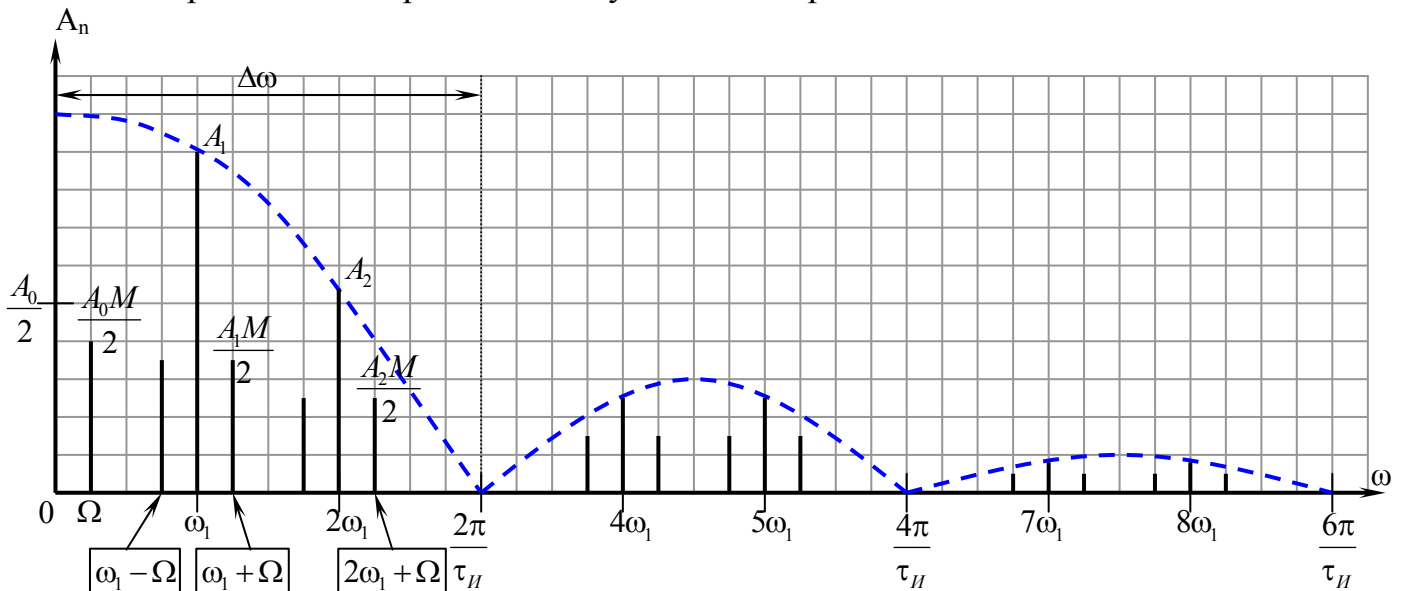
Определим спектр сигнала. Для этого необходимо несущее колебание разложить в ряд Фурье:

$$U(t) = (1 + M \cos \Omega t) \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \right].$$

Чтобы определить спектр, нужно найти сумму гармонических колебаний:

$$\begin{aligned}
U(t) &= \frac{A_0}{2} + \frac{A_0 M}{2} \cos \Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) + M \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = \\
&= \frac{A_0}{2} + \frac{A_0 M}{2} \cos \Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M A_n}{2} \cos[(n\omega_1 + \Omega)t + \varphi_n] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M A_n}{2} \cos[(n\omega_1 - \Omega)t + \varphi_n]
\end{aligned}$$

Эта формула является спектральным представлением АИМ сигнала. На основе этого выражения построим амплитудный спектр сигнала:



В данном случае $A_3 = A_6 = 0$.

Из графика видно, что в результате АИМ около каждой гармоники с частотой $n\omega_1$ спектра немодулированной импульсной последовательности появляются две боковые составляющие на частотах $n\omega_1 + \Omega$ и $n\omega_1 - \Omega$. Кроме того, имеется составляющая с частотой модуляции Ω – это полезная составляющая. Спектр данного сигнала бесконечен, но на практике ширину спектра принимают равной ширине первого лепестка $\Delta\omega$.

$$\Delta\omega_{АИМ} = \frac{2\pi}{\tau_{И}} \gg \Omega.$$

Это достаточно широкая полоса, для сравнения возьмем амплитудную модуляцию (АМ):

$$\Delta\omega_{АМ} = 2\Omega,$$

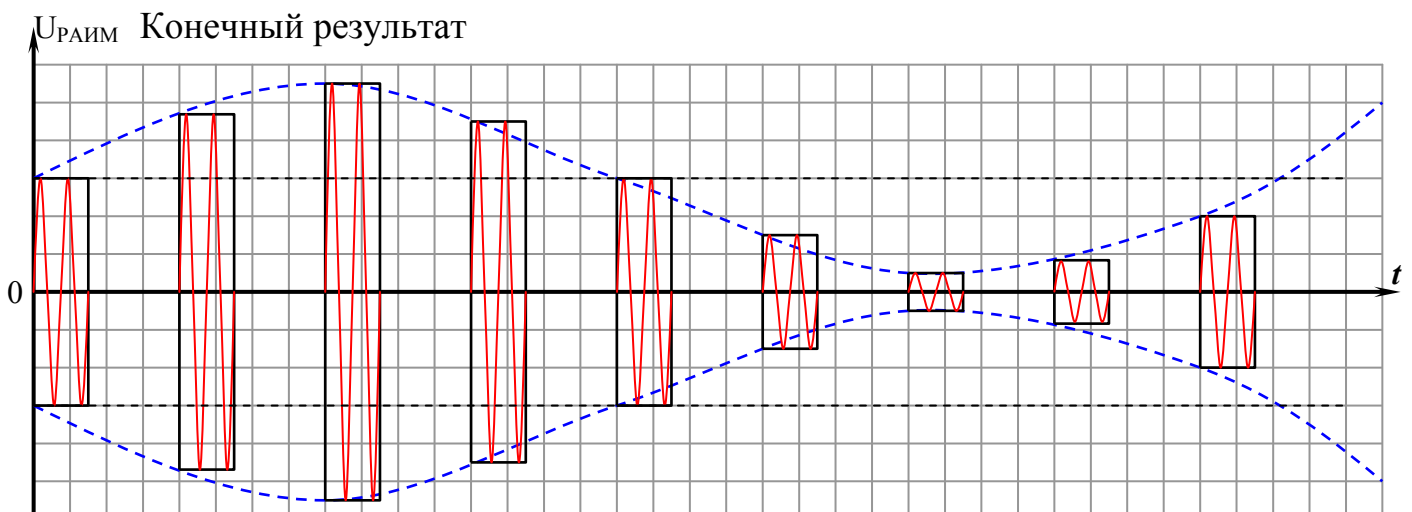
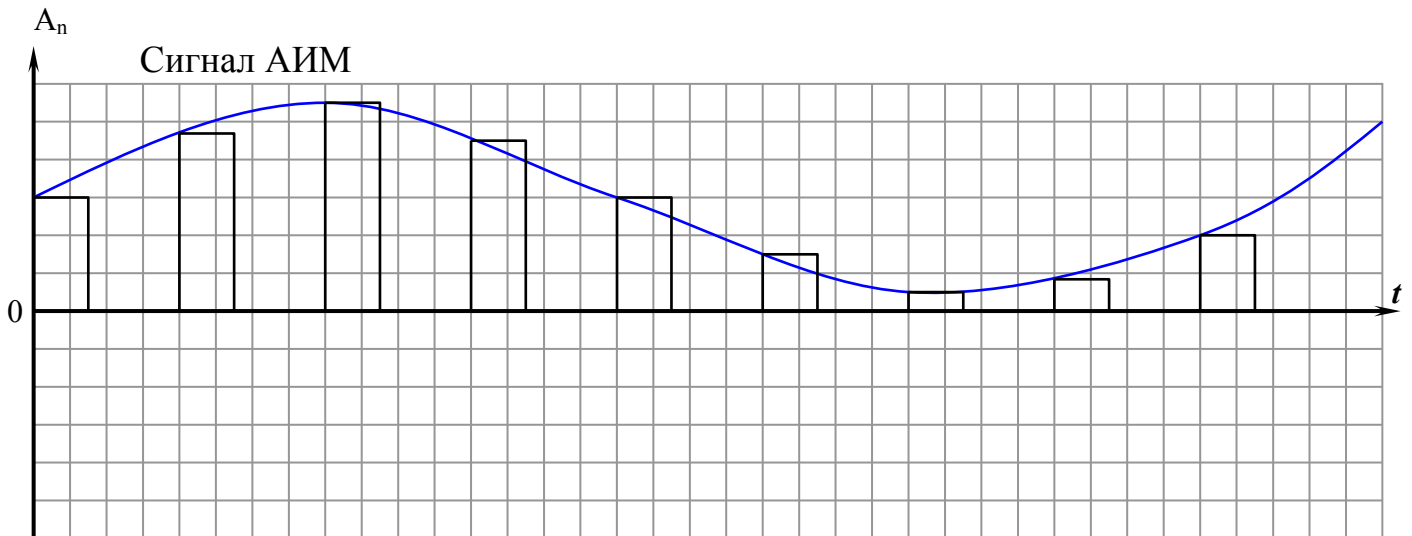
т. е. $\Delta\omega_{АИМ}$ – это широкополосный сигнал, который занимает значительно более широкую полосу, чем модулирующий сигнал.

Отметим, что при АИМ ширина спектра определяется только длительностью импульса. Поскольку при импульсной модуляции спектр сосредоточен в области низких частот, то для передачи сообщения по радиоканалу необходимо сместить этот спектр в область высоких частот. Это осуществляется посредством вторичной модуляции (см. выше второй этап). При вторичной модуляции АИМ

сигнал является модулирующим, а гармонический сигнал – несущей. В результате получается радиосигнал АИМ.

$$U(t) = V(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kt) \cos \omega t .$$

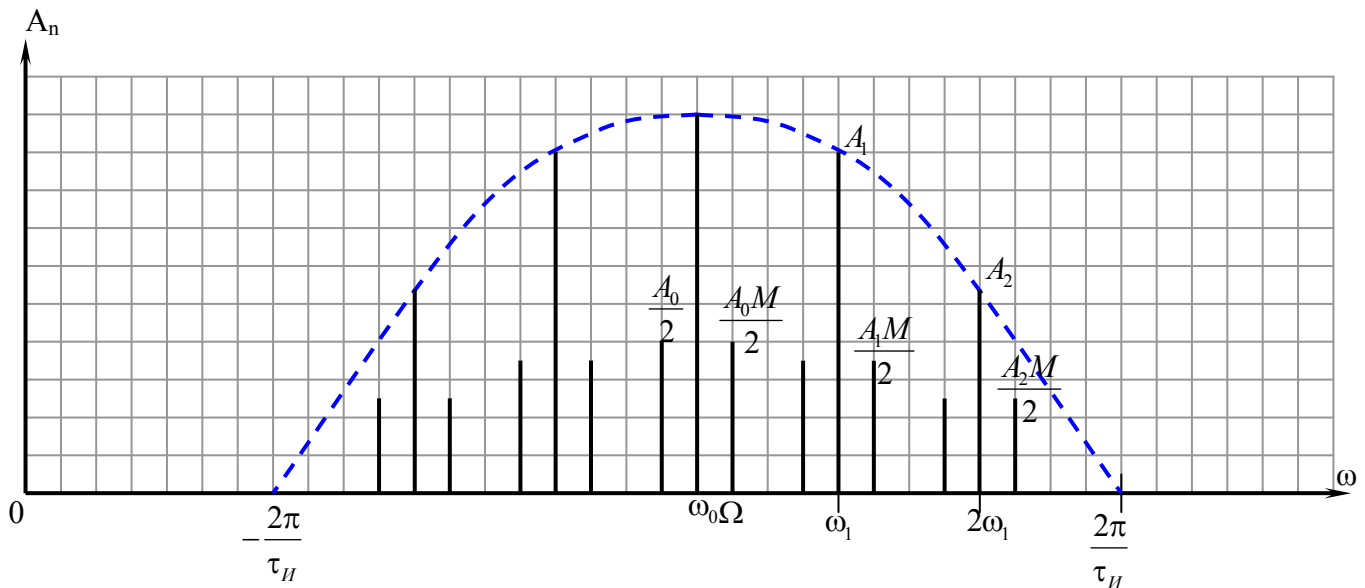
На следующих графиках показан процесс модуляции высокочастотного колебания сигналом АИМ.



Ширина спектра сигнала АИМ при модуляции высокой частоты удваивается:

$$\Delta\omega_{РАИМ} = 2\Delta\omega_{АИМ} = \frac{4\pi}{\tau_{II}}$$

На следующем графике показан спектр сигнала ТАИМ.

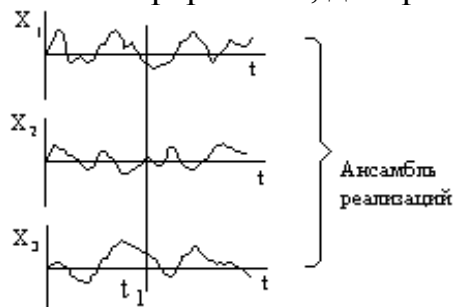


Из графика видно, что спектр сигнала АИМ смещается в область высокой частоты ω_0 . Спектр симметричен относительно несущей частоты ω_0 . Сигнал ТАИМ относится к широкополосным сигналам.

3. Случайные сигналы

3.1. Вероятностные характеристики случайных сигналов

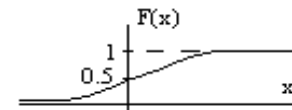
Случайный процесс (СП) – совокупность (ансамбль) функций времени, подчиняющийся некоторой общей для них статистической закономерности. Бывают непрерывные, дискретные, квантованные и цифровые СП.



Если взять конкретные значения t_1 , то, усреднив их, можно получить математическое ожидание.

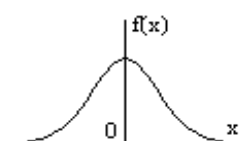
$$F(x) = p(X < x),$$

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$



$F(x)$ – интегральный закон распределения. Он показывает вероятность того, что произвольно взятое X будет меньше x .

Плотность распределения величины $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ показывает, какова наибольшая вероятность попадания в за-



данный интервал.

На практике наиболее значимыми являются следующие параметры СП.

Математическое ожидание – величина, к которой в среднем стремится СП:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсия характеризует мощность процесса, разброс случайных значений относительно математического ожидания $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx$.

Среднеквадратическое отклонение характеризует линейный разброс, а не квадратичный, как дисперсия: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

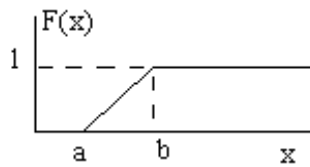
Для дискретных сигналов каждое значение возможно с вероятностью p_k , но $\sum p_k = 1$.

Свойства

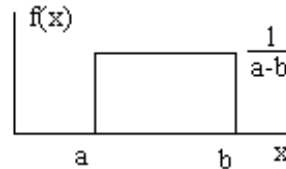
1. Если $x_1 > x_2$, то $F(x_1) > F(x_2)$.
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
3. Если $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), то $f(x) \rightarrow 0$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ — площадь плотности вероятности всегда равна 1.

Законы распределения

Равномерный закон

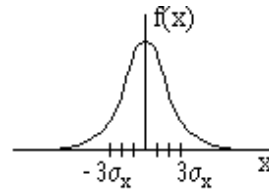
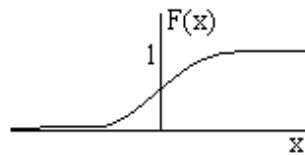


$$m_x = (b + a) / 2$$



$$D_x = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Нормальный (Гауссовский) закон



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = 1 - \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right),$$

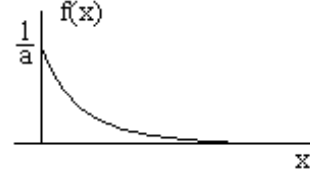
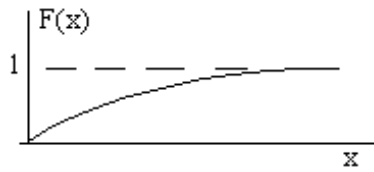
где Φ – функция Лапласа (функция ошибки), берется из справочника.

Вероятность попадания $P(3\sigma) = 0,997$, $P(2\sigma) = 0,95$, т. е. в более узкий интервал вероятности попасть труднее.

Экспоненциальный закон

$$F(x) = 1 - e^{-x/a} \text{ при } X \geq 0;$$

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a} \text{ при } X \geq 0.$$

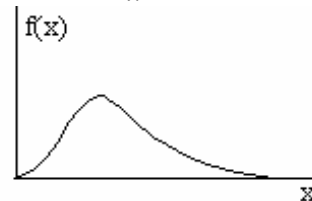
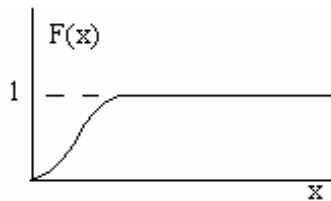


$$m_x = a \quad D_x = a^2$$

Релевский закон

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$



Основные положения ковариационной теории

$$R_{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} ((x(t_1) - m_x)(x(t_2) - m_x) f(x) dx \text{ — это ковариационная}$$

функция. Она характеризует взаимодействие случайного процесса между собой в случайные моменты времени t_1 и t_2 . Чем меньше значение, тем меньше меняется процесс.

$$R(x_1(t_1)x_2(t_2)) = M(x_1(t_1)x_2(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 ,$$

где $W(x_1, x_2, t_1, t_2)$ - плотность вероятности распределения в моменты времени t_1 и t_2 .

Если один процесс, то это автоковариационная функция, если два процесса, то это взаимно-ковариационная функция.

$$\text{Если два процесса, то } t_1=t_2=t \text{ и } R(x_1(t)x_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 .$$

Если процесс один и тот же и $t_1=t_2=t$, то $R(x^2(t)) = D_x(t) + m_x^2(t)$ — это есть дисперсия процесса плюс квадрат математического ожидания.

Корреляционная функция

$$K(x_1(t_1)x_2(t_2)) = M[(x_1(t_1) - m_x(x))(x_2(t_2) - m_x(x))] \text{ — она как бы центрирована.}$$

При $t_1=t_2=t$ автокорреляционная функция $K(x^2(t)) = D_x(t)$.

При различных t_1 и t_2 $K_x(t_2, t_1) = R_x(t_2, t_1) - m_x^2$.

Отсюда следует, что $D_x = K_x(0)$ при $t_1=t_2$.

Стационарность и эргодичность процессов

Стационарность в широком смысле понимается так: на протяжении всего отрезка времени математическое ожидание и дисперсия неизменны, а автокорреляционная функция зависит только от разности значений времени t_1 и t_2 и не зависит от времени начала и конца процесса.

В узком смысле - это неизменность n -мерной плотности вероятности процесса.

Эргодический процесс – это такой процесс, при котором параметры случайного процесса можно определить по одной бесконечной реализации.

Для эргодического процесса $\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$.

$K_x(\tau) = R_x(\tau) - \bar{x}^2(t)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt$.

Дисперсия $D_x(t) = R_x(0) - \bar{x}^2(t)$.

Процессы могут быть между собой коррелированные и зависимые. Некоррелированные процессы – это значит, что $K_{xy}(\tau)=0$ при любом τ .

Независимые процессы: $W_{xy} = W_x W_y$.

Независимые процессы всегда некоррелированные, зависимые процессы могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

3.2. Корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов

Спектральная плотность сигнала может быть определена только для постоянного процесса. Для случайного процесса это невозможно, поэтому используют спектральную плотность мощности.

Пусть имеется k -я реализация случайного процесса $X_K(t)$. Ограничим ее отрезком времени T . Теперь это усеченная k -я реализация $X_{KT}(t)$. Найдем спектральную плотность $X_{KT}(\omega)$ для $X_{KT}(t)$. Отсюда энергия на рассматриваемом участке по равенству Парсеваля:

$$\mathcal{E}_{x_{KT}} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{KT}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{X}_{KT}(\omega)|^2 d\omega.$$

Получим среднюю мощность реализации на отрезке T , поделив выражение на T :

$$\bar{x}_{KT}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\dot{X}_{KT}|^2}{T} d\omega.$$

При увеличении T энергия возрастает, но отношение \mathcal{E}_{KT}/T остается постоянным.

$$\bar{x}_{KT}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{X}_{KT}|^2}{T} d\omega.$$

Отсюда $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{X}_{KT}|^2}{T} = W_x(\omega)$ — спектральная плотность мощности. Это предел спектральной плотности усеченной реализации, деленной на время T . Это запись для эргодического процесса.

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega — \text{среднее значение квадрата процесса.}$$

$$\text{Если } \bar{x}(t) = 0, \text{ то } \bar{x}^2 = D_x \Rightarrow D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega.$$

Теорема Винера – Хинчина

Это есть соотношение между энергетическим спектром и корреляционной функцией случайного процесса.

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Это прямое и обратное преобразования Фурье соответственно.

При $\bar{x} = 0$

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

4. Линейные цепи

4.1. Частотные и временные характеристики линейных цепей

Электрическая цепь осуществляет преобразование сигналов, поступающих на ее вход. Поэтому в самом общем случае математическую модель цепи можно задать в виде соотношения между входным воздействием $S_{ex}(t)$ и выходной реакцией $S_{вых}(t)$:

$$S_{вых}(t) = TS_{ex}(t),$$

где T – оператор цепи.

На основании фундаментальных свойств оператора можно сделать заключение о наиболее существенных свойствах цепей.

1. Если оператор цепи T не зависит от амплитуды воздействия, то цепь называется линейной. Для такой цепи справедлив принцип суперпозиции, отражающей независимость действия нескольких входных воздействий:

$$T[S_{ex1}(t) + S_{ex2}(t) + \dots + S_{exn}(t)] = TS_{ex1}(t) + TS_{ex2}(t) + \dots + TS_{exn}(t).$$

Очевидно, что при линейном преобразовании сигналов в спектре отклика нет колебаний с частотами, отличными от частот спектра воздействий.

Класс линейных цепей образуют как пассивные цепи, состоящие из резисторов, конденсаторов, индуктивностей, так и активные цепи, включающие еще и транзисторы, лампы и т. п. Но в любой комбинации этих элементов их параметры не должны зависеть от амплитуды воздействия.

2. Если сдвиг входного сигнала во времени приводит к такому же сдвигу выходного сигнала, т. е.

$$S_{вых}(t \pm t_0) = TS_{ex}(t \pm t_0),$$

то цепь называют стационарной. Свойство стационарности не распространяется на цепи, содержащие элементы с переменными во времени параметрами (индуктивности, конденсаторы и т. п.).

Дельта-функция как пример пробного сигнала

Для анализа прохождения сигналов через электрические цепи широко используются пробные сигналы, обладающие какими-либо характерными свойствами. Такой функцией, в частности, является дельта-функция $\delta(t)$, обращающаяся в ноль при $t \neq 0$ и в бесконечность при $t = 0$ так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Этому определению удовлетворяет, например, прямоугольный импульс длительностью t_u , амплитуда которого обратно пропорциональна его длительности $1/t_u$. При $t_u \rightarrow 0$ амплитуда импульса бесконечно растет, а площадь остается постоянной – равной единице. Действительно, если

$$f(t, t_u) = \begin{cases} 1/t_u, & |t| < t_u/2, \\ 0, & |t| > t_u/2, \end{cases}$$

то дельта-функцию можно определить как $\delta(t) = \lim_{t_u \rightarrow 0} f(t, t_u)$.

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{t_u \rightarrow 0} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} f(t, t_u) dt = \frac{1}{t_u} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} dt = 1.$$

В более общем случае дельта-функцию можно записать в виде

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \in [-\infty; t_0) \cap (t_0, \infty]. \end{cases}$$

Спектральную плотность дельта-импульса $A\delta(t)$ найдем с помощью прямого преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = A.$$

На основании определения дельта-функции интервал интегрирования в формуле можно сделать сколь угодно малым, лишь бы он включал в себя момент $t=0$. В пределе он может быть устремлен к нулю и подынтегральная функция $e^{j\omega t}$ примет значение, равное единице. Таким образом, $\dot{S}(\omega) = A$. Следовательно, спектральная плотность дельта-импульса имеет равномерный частотный спектр. ФЧХ дельта-импульса равна нулю для всех частот. Это означает, что все гармонические составляющие начинаются с одной фазы и образуют бесконечный пик при $t=0$.

По определению, дельта-функция обладает свойством, которое может быть выражено соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) \delta(t - t_0) dt = S(t_0).$$

Его называют фильтрующим свойством дельта-функции, согласно которому интеграл от произведения произвольной функции на $\delta(t-t_0)$ равен значению этой функции в точке $t=t_0$.

На основании обратного преобразования Фурье выразим дельта-функцию через ее спектр :

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega.$$

По аналогии можно ввести дельта-функцию аргумента ω :

$$\delta(\omega) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt.$$

Знак показателя экспоненты не влияет на значение интеграла, поскольку $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$, и независимо от знака интеграл от нечетной функции \sin на симметричном интервале интегрирования равен нулю. Поэтому можно записать:

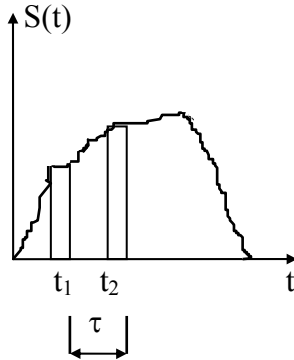
$$\delta(\omega) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt.$$

4.2. Методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи

Пусть на вход линейной стационарной цепи подан сигнал $S_{ex}(t)$. На основании определений дельта-функции и ее фильтрующего свойства входной сигнал может быть представлен в виде интеграла

$$S_{\text{ex}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ex}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau,$$

поскольку он является предельным выражением суммы, которой входной сигнал представляется как бесконечная последовательность дельта-импульсов, смещенных друг относительно друга на время τ . Амплитуда импульсов равна значению сигнала в те же моменты времени τ .



Такой метод аналитического моделирования сигналов называется методом интеграла наложения (на последовательность пробных импульсов накладывается информационный сигнал).

Если установить реакцию цепи на отдельный дельта-импульс, то в силу линейности и стационарности цепи можно просуммировать отдельные реакции и получить выходной отклик на любое входное воздействие. Поэтому вводят импульсную характеристику цепи $h(t)$, являющуюся выходным откликом на входной дельта-импульс. Таким образом, выходная реакция $S_{\text{вых}}(t)$ на произвольное входное воздействие может быть представлена интегралом

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(t) h(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что сигнал на выходе цепи $S_{\text{вых}}(t)$ в момент t получается суммированием мгновенных значений входного сигнала $S_{\text{ex}}(t)$ с весом $h(t - \tau)$ за все предыдущее время с начала сигнала. Импульсная характеристика и метод интеграла наложения являются основными понятиями при исследовании прохождения сигналов через линейные цепи методом интеграла наложения.

Последнее соотношение может быть записано также в виде

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(t - \tau) h(\tau) d\tau.$$

Представим входной сигнал в виде интеграла Фурье:

$$S_{\text{ex}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Если сделать подстановку $t = t - \tau$ (а потом отбросить штрих у t), то можно записать, что

$$S_{\text{ex}}(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega(t - \tau)} d\omega.$$

Подставив это выражение в предыдущее и изменив порядок интегрирования, получим

$$S_{BbLX}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{BX}(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right) h(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} * \\ * \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{BX}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega.$$

Внутренний интеграл является комплексной функцией частоты. Обозначим его как

$$\dot{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \rightarrow h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

$\dot{K}(j\omega)$ является прямым преобразованием Фурье для импульсной функции цепи. Его функции называют частотным коэффициентом передачи цепи (или комплексной частотной характеристикой).

Частотному коэффициенту передачи можно дать и другие эквивалентные толкования. Одно из них получается в результате подстановки :

$$S_{bLX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{BX}(\omega) \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Как видно, полученное выражение совпадает с обратным преобразованием Фурье для спектра выходного сигнала, поскольку

$$\dot{S}_{BX}(\omega) \dot{K}(j\omega) = \dot{S}_{BbLX}(\omega),$$

или, другими словами, частотный коэффициент передачи есть множитель пропорциональности между спектральными плотностями входного и выходного сигналов. Отсюда возникло название метода анализа прохождения сигналов через линейные цепи, основанного на использовании частотного коэффициента передачи, как спектрального метода.

Практически частотный коэффициент передачи удобнее вычислять, пользуясь другим его определением. Для этого рассмотрим в качестве входного сигнала гармоническое колебание в комплексной форме: $S_{BX}(t) = \dot{S}_{BXm} e^{j\omega t}$. Гармоническое колебание, сдвинутое во времени $S_{BX}(t-\tau) = \dot{S}_{BXm} e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau}$. Подставив это соотношение в исходное выражение, вынося из-под интеграла функции, не зависящие от переменной интегрирования, и, перегруппировав члены, получим

$$S_{BbLX}(t) = \dot{S}_{BXm} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} = \dot{S}_{BbLXm} e^{j\omega t}.$$

Здесь интеграл есть частотный коэффициент передачи. Таким образом, $\dot{S}_{BXm} \dot{K}(j\omega) = \dot{S}_{BbLXm}$, откуда

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{S}_{BbIXm}}{\dot{S}_{BXm}},$$

и, следовательно, коэффициент передачи равен отношению комплексных амплитуд гармонических колебаний на выходе и входе линейной цепи. Частотный коэффициент передачи обычно записывают в показательной форме:

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{S_{BbIXm}}{S_{BXm}} e^{j(\varphi_{BbIX} - \varphi_{BX})},$$

где $K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)|$ - амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ), $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$ - фазочастотная характеристика цепи (ФЧХ).

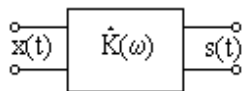
Из последнего соотношения следует еще один метод практического определения импульсной характеристики $h(\tau)$:

$$h(\tau) = \frac{dS_{BbIX}(t)/d\tau}{S_{BX}(t-\tau)},$$

где τ - время анализа, $dS_{BbIX}(t)/d\tau$ - скорость изменения выходного сигнала $S_{BX}(t)$ в течение времени анализа τ , $S_{BX}(t-\tau)$ - значение входного сигнала в течение времени анализа τ .

Таким образом, импульсная характеристика характеризует скорость изменения выходного сигнала за время анализа по отношению к мгновенным значениям входного сигнала в течение этого же интервала времени. Для ее определения достаточно знать формы входного и выходного сигналов за время действия пробного сигнала. Отсюда понятно и введение понятия пробного сигнала.

5. Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи



Если на входе цепи действует случайный процесс с нормальным законом распределения, то на выходе получим случайный процесс, имеющий нормальный закон, но с уменьшенными корреляционными и спектральными характеристиками. При другом распределении на входе цепи отыскание распределения на выходе представляет собой сложную задачу.

Анализ передачи нормальных процессов через линейные цепи по существу сводится к корреляционному, или спектральному, анализу.

5.1. Спектральная характеристика мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи

Если есть k -я реализация на интервале T $X_{kT}(t)$, то мы можем найти ее спектр $X_{kT}(\omega)$. Тогда на выходе цепи будет $\dot{X}_{\text{вых}kT}(\omega) = \dot{X}_{kT}(\omega)\dot{K}(\omega)$.

По теореме Парсеваля: $\mathcal{E}_{\text{вых}KT} = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{X}_{\text{вых}KT}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{X}_{KT}(\omega)|^2 |\dot{K}(\omega)|^2 d\omega$.

Определим спектральную плотность мощности на выходе цепи:

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{X}_{\text{вых}KT}(\omega)|^2}{T}$$

Вытекает следующее соотношение: $W_{\text{вых}}(\omega) = W(\omega)K^2(\omega)$. Возведение передаточной функции в квадрат объясняется тем, что она определяет отношение напряжений (токов) на входе и выходе, а $W(\omega)$ является спектральной плотностью мощности случайной функции.

Корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи

$$R_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) K^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Корреляционная функция входного сигнала $R_{\text{вх}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$.

Корреляционная функция импульсной характеристики: $R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$.

Следовательно, произведению спектральных функций $W(\omega)$ и $K(\omega)$ соответствует свертка функций $R_{\text{вх}}(\tau)$ и $R_g(\tau)$: $R_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вх}}(x) R_g(\tau - x) dx$. Отсюда, зная корреляционные функции $R_{\text{вх}}(\tau)$ и $R_g(\tau)$, можно найти энергетический спектр:

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вых}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Пусть на входе - белый шум (спектральная плотность равна 1 на всех частотах), следовательно: $W_{\text{вых}}(\omega) = W_0 K^2(\omega)$, так как $W_{\text{вх}}(\omega) = W_0 = \text{const}$. Тогда

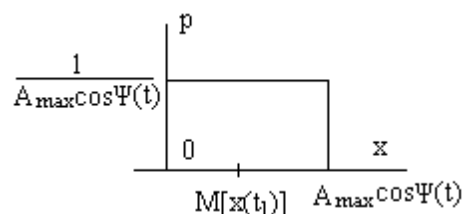
$$R_{\text{вых}}(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 R_g(\tau)$$

Следовательно, если мы знаем вид корреляционной функции импульсной характеристики, то вид $R_{\text{вых}}(\tau)$ имеет такой же вид.

Гармонические колебания со случайной амплитудой

Пусть имеется случайный процесс $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t) \cos[\Psi(t)]$. Будем считать, что передаваемое сообщение содержится в огибающей.

Пусть $A(t)$ - стационарный, эргодиче-

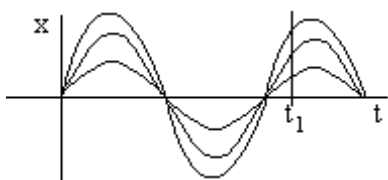


ский случайный процесс, $\psi(t)$ – детерминированный процесс.

Для каждого момента времени $0 \leq x(t) \leq A_{\max} \cos \Psi(t)$.

Плотность вероятности величины x при заданном времени t

$p(x;t) = \frac{1}{A_{\max}} \cos \Psi(t)$, при этом считается, что A распределено равномерно от 0 до A_{\max} .



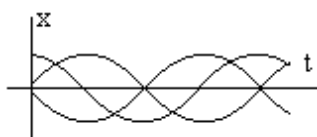
$$M[x(t_1)] = \frac{1}{A_{\max} \cos \Psi(t_1)} \int_0^{A_{\max} \cos \Psi(t_1)} x dx = \frac{A_{\max} \cos \Psi(t_1)}{2}$$

$$M[x^2(t_1)] = \frac{1}{A_{\max} \cos \Psi(t_1)} \int_0^{A_{\max} \cos \Psi(t_1)} x^2 dx = \frac{A_{\max}^2 \cos^2 \Psi(t_1)}{3}$$

$$D[x(t_1)] = M[x^2(t_1)] - M^2[x(t_1)] = \frac{A_{\max}^2 \cos^2 \Psi(t_1)}{12}$$

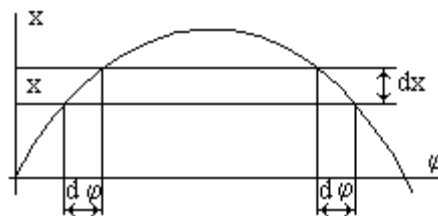
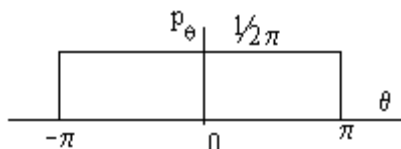
и математическое ожидание и дисперсия зависят от времени, т. е. процесс нестационарный.

Гармонические колебания со случайной фазой



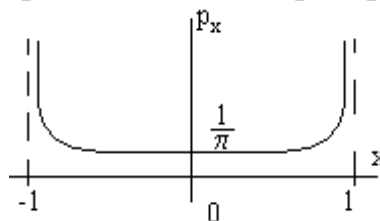
Фаза обычно распределена по равномерному закону:
 $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$.

Имеется случайный процесс $x(t) = \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$. Найдем закон распределения фазы: $\varphi(t) = \omega_0 t + \theta_k$.



Вероятность того, что x пребывает в интервале dx , равна плотности распределения p_x на интервале dx

$$p_x dx = 2 p_\theta d\theta \Rightarrow p = 2 \frac{1}{2\pi} d\theta \Rightarrow p_x = \frac{1}{\pi \left| \frac{dx}{d\theta} \right|}$$



при $-1 \leq x \leq 1$,

где $\left| \frac{dx}{d\theta} \right| = |\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2}$.

Математическое ожидание

$$M[x(t)] = \int_{-1}^1 x p_x dx = \int_{-1}^1 x \frac{1}{\pi \sqrt{1 - x^2}} dx = 0$$

$$\text{или } \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0.$$

Перемножим 2 значения в разные моменты времени:

$$x(t_1)x(t_2) = \cos(\omega t_1 + \theta) \cos(\omega t_2 + \theta) = \frac{1}{2} [\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\theta) + \cos(\omega(t_1 - t_2))].$$

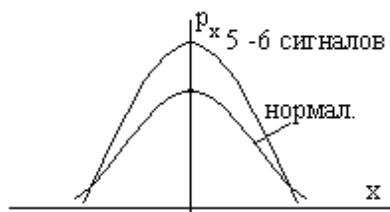
Математическое ожидание от произведения:

$$M[x(t_1)x(t_2)] = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 \tau), \text{ где } \tau = t_1 - t_2.$$

Процесс $x(t)$ является стационарным, так как корреляционная функция зависит только от разности времени t_1 и t_2 , а также от самого времени.

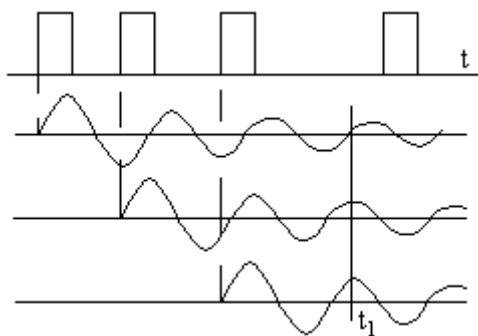
Гармоническое колебание со случайной фазой является стационарным и эргодическим процессом. Гармонические колебания со случайной фазой и случайной амплитудой образуют стационарный, но неэргодический процесс.

При суммировании нескольких гармонических колебаний (5–6) со случайной фазой мы получим стационарный случайный процесс, близкий к гауссовскому.



5.2. Нормирование случайных процессов в узкополосных линейных цепях

Пусть на входе линейной цепи действует стационарный случайный процесс с распределением, отличным от нормального. Если интервал корреляции этого процесса меньше постоянной времени линейной цепи (т. е. ширина энергетического спектра больше полосы пропускания цепи), то распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному. Эффект нормализации тем выше, чем меньше полоса пропускания цепи.



Например. На высокодобротный контур подается случайный процесс, представляющий собой последовательность импульсов со случайным и ненормальным временем появления. На выходе получаем сигнал как сумму свободных колебаний, вызванных предыдущими импульсами и не успевших затухнуть к рассматриваемому моменту времени. Чем уже полоса пропускания цепи, тем большее число

соизмеримых по величине и некоррелированных слагаемых принимает участие в образовании результирующего колебания в момент времени t_1 . В соответствии с центральной предельной теоремой этого вполне достаточно для того, чтобы про-

цесс приближался к нормальному.

В широкополосных линейных цепях при некоторых условиях происходит обратный процесс – денормализация, т. е. нормальный процесс на входе порождает случайный процесс на выходе, отличный от нормального.

Но такое отличие только в частности, в целом же, если рассматривать бесконечное число импульсов, то процесс остается нормальным.

Комплексный случайный процесс

Пусть есть случайный процесс $x(t)$. Подберем ему сопряженный по Гильберту сигнал $x_1(t)$: $x_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

$$x_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Тогда комплексный случайный процесс $\dot{z}(t) = x(t) + jx_1(t)$.

Пусть $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$, тогда $x_1(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \theta(t)]$. Отсюда комплексный случайный процесс $\dot{z}(t) = A(t)e^{j\omega_0 t + \theta(t)}$.

Спектры сигналов $x(t)$ и $x_1(t)$ равны $W_x(\omega) = W_{x_1}(\omega)$. Отсюда следует, что корреляционные функции одинаковы: $R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$.

$$D_x = D_{x_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega$$

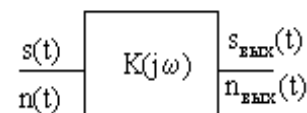
Предположим, что $x_{kT}(t)$ соответствует $\dot{X}_{kT}(\omega)$, тогда $\dot{X}_{1kT}(\omega) = \dot{X}_{kT}(\omega)e^{j\varphi}$, где $\varphi = -90^\circ$. То есть $X_{1kT}(\omega) = \begin{cases} -j\dot{X}_{kT}(\omega) & \text{при } \omega > 0 \\ +j\dot{X}_{kT}(\omega) & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$

$$\dot{z}_{kT}(t) = x_{kT}(t) + jx_{1kT}(t)$$

Отсюда следует, что при $\omega > 0$ $\dot{Z}_{kT}(t) = X_{kT}(\omega) + j[-jX_{kT}(\omega)] = 2X_{kT}(\omega)$, а при $\omega < 0$ $\dot{Z}_{kT}(t) = X_{kT}(\omega) + j[jX_{kT}(\omega)] = 0$.

ВЫВОД. Спектр случайного сигнала отличен от 0 только на положительных частотах.

6. Аналоговая фильтрация сигналов



Нужно разработать линейное устройство (фильтр). Это линейный четырехполюсник с постоянными параметрами и передаточной функцией $K(j\omega)$. На его вход подается смесь сигнала и шума. Сигнал полностью известен, шум представляет собой вероятностный процесс с заданными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий получение на выходе наибольшего возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению шума.

Исторически сложилось, что оптимальной является П-образная схема приемного устройства. Недостатком является отсутствие учета формы сигнала и априорных (известных) характеристик шума. В зависимости от типа решаемой задачи при синтезе линейного оптимального фильтра возможно использование различных критериев оптимизации.

При решении задач обнаружения сигнала на фоне помех широко используется критерий максимума отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

6.1. Согласованная фильтрация детерминированного сигнала

Синтез оптимального фильтра – это отыскание передаточной характеристики устройства, обеспечивающего оптимизацию сигнал/шум на выходе $K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi_K(\omega)}$, т. е. задача сводится к отысканию АЧХ и ФЧХ устройства.

Естественно, результаты синтеза будут ограничены входными данными.

Пусть сигнал $s(t)$ действует на фоне шума с постоянным энергетическим спектром (белый шум). Введем в рассмотрение время t_0 – это время, за которое производится фиксация уровня сигнал/шум. Выходной сигнал представим в виде

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)e^{j(\theta_s(\omega) + \varphi_k(\omega) + \omega t)} d\omega.$$

Среднеквадратическое значение помехи на выходе фильтра

$$\sigma_{\text{ВЫХ}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)K(\omega)^2 d\omega} = \sqrt{\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)^2 d\omega},$$

где $W(\omega)$ – энергетический спектр помехи.

Отсюда следует:

$$\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{s_{\text{ВЫХ}}(t)}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)e^{j(\theta_s(\omega) + \varphi_k(\omega) + \omega t_0)} d\omega}{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^2 \left[\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega} \right]^{1/2}}.$$

Необходимо, чтобы это соотношение было максимальным. Для этого воспользуемся неравенством Буняковского-Шварца:

$$\left| \int_a^b F_1(x)F_2(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b |F_1(x)|^2 dx \int_a^b |F_2(x)|^2 dx. \text{ Это неравенство обращается в равенство только при выполнении условия } F_2(x) = AF_1^*(x), \text{ где } A \text{ – произвольный постоянный коэффициент.}$$

В нашем случае $F_1(x) = S(\omega)e^{j\theta_s(\omega)}$, $F_2(x) = K(\omega)e^{j(\varphi_k(\omega) + \omega t_0)}$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)e^{j(\theta_s(\omega) + \varphi_k(\omega) + \omega t)} d\omega \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega \right]^{1/2}$$

Таким образом,

$$\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{s_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \leq \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}}{\left(\frac{W_0}{2\pi} \right)^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}} = \frac{1}{W_0^{1/2}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}.$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках есть полная энергия входного сигнала \mathcal{E} , запишем окончательное выражение: $\frac{s_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} \leq \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{W_0}}$.

Это неравенство обращается в равенство при выполнении условия

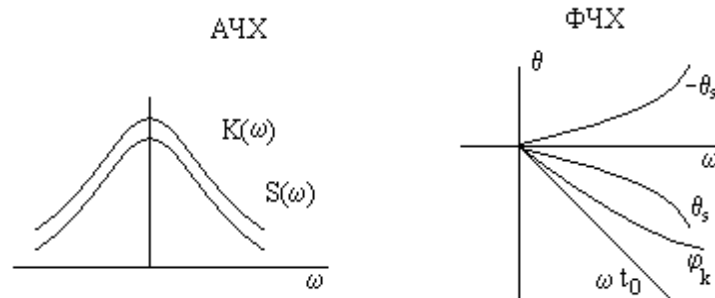
$$K(\omega) e^{j(\varphi_k(\omega) + \omega t_0)} = AS^*(\omega) = AS e^{-j\theta_s(\omega)}.$$

Откуда $\dot{K}(j\omega) = AS^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} = AS(\omega) e^{-j(\theta_s(\omega) + \omega t_0)}$.

Фильтр с таким коэффициентом передачи называется фильтром, согласованным с сигналом. Он обеспечивает на выходе максимально возможное соотношение:

$$\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} \leq \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{W_0}}.$$

АЧХ: $K(\omega) = AS(\omega)$, ФЧХ: $\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0]$.



Коэффициент A – размерный коэффициент, который приводит к безразмерному коэффициенту передачи. Добавление ωt_0 делается для выделения всей энергии сигнала.

ВЫВОД. Фильтр обеспечивает максимально возможное соотношение сигнал/шум на выходе за счет:

1. Условия компенсации начальных фаз гармонических составляющих сигнала, так как ФЧХ фильтра равна и противоположна по знаку ФЧХ сигнала.
2. За счет совпадения формы $K(\omega)$ и $S(\omega)$ фильтр пропускает составляющую шума неравномерно, что приводит к уменьшению шума на выходе.
3. Сигнал ослабляется слабее, чем шум. Это приводит к максимуму отношения сигнал/шум на выходе.

6.2. Оптимальная фильтрация случайного сигнала

$$\text{Импульсная характеристика } g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

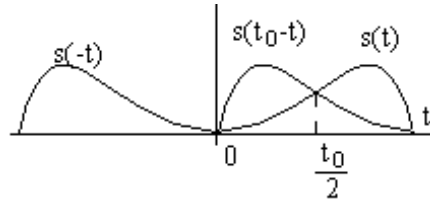
Учитывая, что $S^*(\omega) = S(-\omega)$, и вводя новую переменную $\omega_1 = -\omega$, получим

$$g(t) = -\frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega_1) e^{-j\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 = As(t_0 - t),$$

т. е. если задан сигнал $s(t)$, то импульсная характеристика определяется как

$$g(t) = As(t_0 - t).$$

Построение графика функции $s(t_0 - t)$: кривая $s(-t)$ является зеркальным отражением заданного сигнала $s(t)$. Функция же $s(t_0 - t)$ сдвинута относительно $s(-t)$ на величину t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу $s(t)$ с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$.



Так как импульсная характеристика не может быть отрицательной, то t_0 не может быть меньше, чем T_c (длительность сигнала).

При увеличении t_0 возрастания сигнала не будет, а будет наблюдаться сдвиг сигнала вправо. Условие $t_0 \geq T_c$ накладывает на сигнал требование его конечной длительности.

ВЫВОД. Применение согласованной фильтрации возможно при импульсном сигнале или ограниченной по времени пачке импульсов.

Оценка реализуемости согласованного фильтра

Пусть задан сигнал $s(t)$, которому соответствуют импульсная характеристика согласованного фильтра и преобразование Фурье от этой функции $K(j\omega)$. Возникает вопрос, при каких условиях $K(j\omega)$ может являться передаточной функцией физически осуществимого устройства.

Для анализа будет использован критерий Пэли-Винера: $\int_0^{\infty} \frac{|\ln K(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$, где

ω — безразмерная нормированная величина (а не частота). Интеграл должен быть сходящимся.

Критерий Пэли-Винера является необходимым, но недостаточным. Он оставляет открытым вопрос о структуре согласованного фильтра. Но из него следует, что АЧХ фильтра должна быть интегрируемой в квадрате: $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega < \infty$.

При выполнении этого условия $|\ln K(\omega)|$ будет возрастать медленнее, чем $1 + \omega^2$, что необходимо для сходимости интеграла.

АЧХ может быть равной 0 только на некоторых дискретных частотах, но не в конечной полосе частот. В связи с этим фильтры с П-образной АЧХ нереализуемы.

Передаточная функция $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha\omega}$ при $\omega > 0$ реализуема, так как $|\ln K(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha\omega|$ растет медленнее, чем $1 + \omega^2$.

Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра

Используем соотношение $s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$. Подставив в него

$\dot{K}(j\omega) = AS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$, получим

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S^*(j\omega)e^{j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = AB_s(t-t_0),$$

т. е. выходной сигнал будет повторять форму корреляционной функции, смещенную во времени.

При $t=t_0$ $B_s=\mathcal{E}$ и выражение переходит в $s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = A\mathcal{E}$.

Рассмотрим параметры шума. Наиболее распространен белый шум – нормальный шум со спектральной плотностью $W_0=\text{const}$. При действии нормального шума на линейную цепь на выходе шум остается нормальным и $W_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K^2(\omega)W_0$. Следовательно, корреляционная функция шума на выходе

$$R_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{ВЫХ}}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = A^2 \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = A^2 W_0 B_s(\tau).$$

Значит, корреляционная функция на выходе по форме совпадает с автокорреляционной функцией входного сигнала и с выходным сигналом.

При $\tau=0$ найдем дисперсию шума на выходе:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = R_{\text{ВЫХ}}(0) = A^2 W_0 B_s(0) = A^2 W_0 \mathcal{E}.$$

Найдем соотношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра (определим не по мощности, а по напряжению): $\frac{s_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \frac{A\mathcal{E}}{\sqrt{A^2 W_0 \mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{W_0}}$.

Это соотношение зависит только от энергии сигнала и спектральной плотности шума. Следовательно, при заданной энергии сигнала и спектральной плотности шума сигналу можно придавать любую форму, выгодную для решения конкретной задачи.

Например, для повышения скрытности работы РЛС выгодно удлинять сигнал при уменьшении его амплитуды. При удлинении сигнала ширина спектра должна быть неизменной. Для этого внутри сигнала необходимо вводить импульсную модуляцию (частотную).

Уточним смысл коэффициента A . Это размерный коэффициент, который удобно нормировать так, чтобы энергии входного и выходного сигналов согласованного фильтра были одинаковы (для исключения усиления энергии фильтром).

Энергия входного сигнала $\mathcal{E} = B_s(\tau)$.

Энергия выходного сигнала $\mathcal{E}_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}^2(t) dt = A \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau$.

Из того, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{вых}}$, получим $A = \frac{(B_s(0))^{1/2}}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau\right)^{1/2}}$.

Отсюда $s_{\text{вых}}(t_0) = AB_s(0) = \frac{(B_s(0))^{3/2}}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau\right)^{1/2}}$.

Следовательно, максимум выходного напряжения может быть больше, чем амплитуда сигнала на входе (даже при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{вых}}$).

7. Нелинейные цепи


7.1. Преобразования радиосигналов в нелинейных цепях

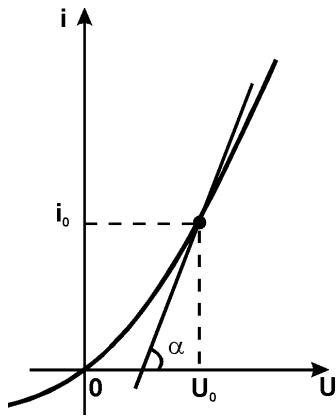
Цепи, которые изучались ранее, относятся к классу линейных цепей. Параметры элементов этих цепей - сопротивлений, индуктивностей, емкостей - не зависят от значений приложенных к ним напряжений или протекающих через них токов.

В действительности любой реальный элемент таким постоянством не обладает и линейная теория оказывается справедливой только в определенных пределах значений напряжений и токов. Существует также обширный класс исключительно важных элементов и устройств, параметры которых существенно зависят от токов или напряжений. Такие элементы называются нелинейными. Им нельзя приписать какой-то постоянный параметр даже при изменении переменных в ограниченном диапазоне. Для количественного описания свойств нелинейных элементов необходимо задавать зависимости, называемые характеристиками. Рассмотрим в общем виде характеристики основных нелинейных идеализированных элементов.

Модели нелинейных элементов

Нелинейный резистивный элемент (НЭ) полностью определяется зависимостью между током i и напряжением U (т. е. ВАХ): $i=i(U)$ или $U=U(i)$. Резистив-

ный НЭ обозначается: . Одна из форм ВАХ может быть представлена на следующем рисунке:

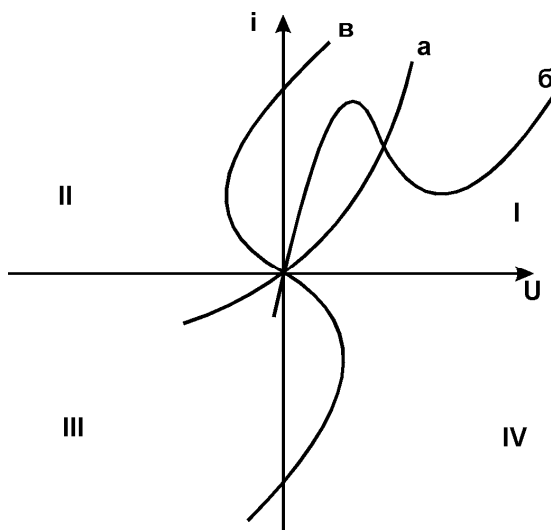


Определить нелинейный резистивный элемент - значит задать его вольтамперную характеристику полностью. В каждой точке ВАХ, заданной конкретным значением напряжения и тока $U=U_0$, $i=i(U_0)=i_0$, можно ввести понятия статического сопротивления:

$$R_{CT}(U_0) = U_0 / i_0$$

и динамического (дифференциального) сопротивления, равного котангенсу угла наклона касательной к ВАХ в данной точке

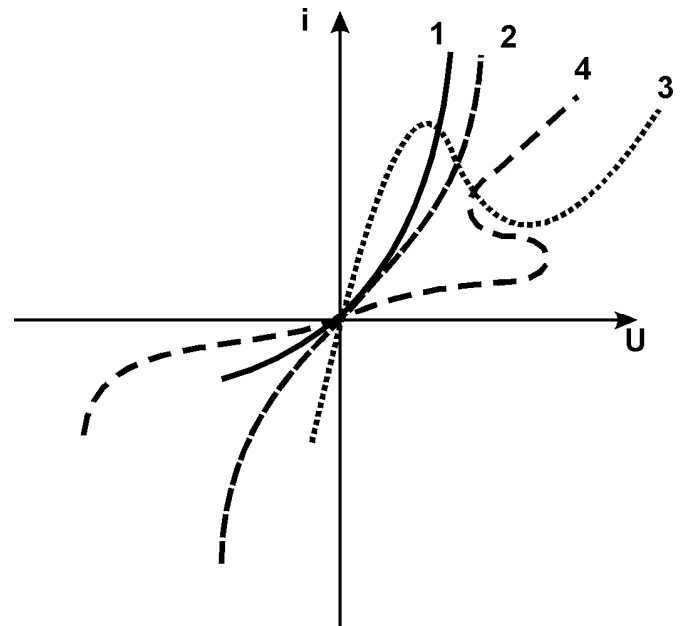
$$r_g = \left. \frac{dU}{di} \right|_{i=i_0} = \text{tg } \alpha .$$



Общая классификация видов ВАХ резистивных НЭ рассматривает их свойства по положению ВАХ по квадрантам в плоскости (U, i) . Если график располагается только в первом и третьем квадрантах, то ВАХ относится к пассивному элементу, поскольку потребляемая мощность $P = U \cdot i \geq 0$ (а,б). Для пассивного элемента $i(0)=0$. Если же часть графика попадает во второй или в четвертый квадрант, то говорят, что элемент является активным (в). Это означает, что в его цепи есть источник электрической энергии.



Другим общим свойством резистивных НЭ является монотонность или немонотонность ВАХ.



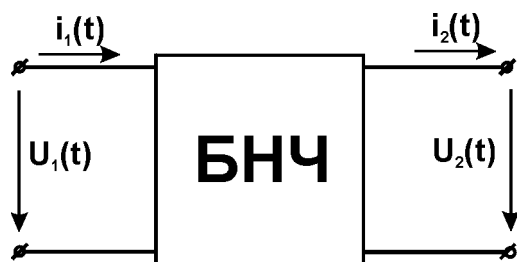
Немонотонные ВАХ имеют знакопеременное дифференциальное сопротивление. На предыдущем рисунке показаны три типа ВАХ по монотонности: а - монотонная, б - N - образная, в - S - образная.

Монотонность ВАХ играет особую роль при анализе цепей, поскольку при решении уравнений приходится оперировать зависимостями $U=U(i)$ и, наоборот, $i=i(U)$. Зависимость, обратная к монотонной, также монотонная и особых проблем при обращении не возникает. Для немонотонных зависимостей необходимо решать уравнения с многозначными функциями. Геометрически обращение монотонной ВАХ соответствует симметричному отражению графика около биссектрисы первого - третьего квадрантов.

Реально в качестве резистивных НЭ используются диоды (1), варисторы (2), туннельные диоды (3), денисторы (4).

Безынерционные нелинейные четырехполюсники

Четырехполюсники, на полюсах которых мгновенные значения токов и напряжений полностью задаются функциями двух переменных x_1 и x_2 , отражающих мгновенные значения токов и напряжений на других полюсах $[F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)]$, называют безынерционными нелинейными четырехполюсниками (БНЧ).



БНЧ могут быть описаны уравнениями, отражающими зависимости токов от напряжений на полюсах:

$$i_1(t) = F_1^Y [U_1(t), U_2(t)];$$

$$i_2(t) = F_2^Y [U_1(t), U_2(t)];$$

или напряжений от токов:

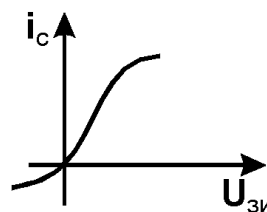
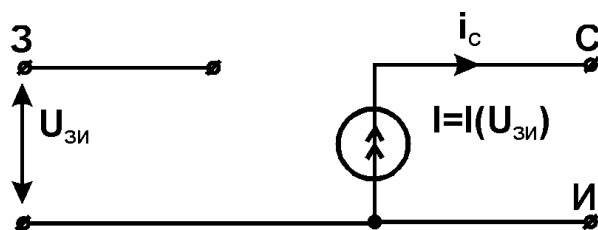
$$U_1(t) = F_1^Y [i_1(t), i_2(t)];$$

$$U_2(t) = F_2^Y [i_1(t), i_2(t)];$$

либо уравнениями смешанного типа:

$$i_1(t) = F_1 [U_1(t), i_2(t)];$$

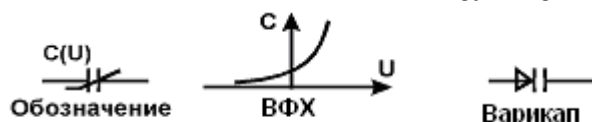
$$U_2(t) = F_2 [U_1(t), i_2(t)].$$



Реальными объектами, которые могут быть описаны как БНЧ, являются, например, биполярный и полевой транзисторы.

Идеализированными моделями БНЧ являются управляемые источники с нелинейными коэффициентами передачи, например идеализированная модель полевого транзистора, в которой зависимость тока стока от напряжения затвор-исток представляется некоторой линейной функцией $I(U)$ ($i_c = i_c(U_{зи})$).

Нелинейная емкость



В нелинейной емкости, условное обозначение которой показано на рисунке, накопленный заряд зависит от приложенного напряжения нелинейным образом: $q=q(u)$. Если определить временную зависимость тока $i(t)$, протекающего через нелинейную емкость под воздействием напряжения $U(t)$, то, поскольку $i(t)=dq/dt$,

дифференцируя сложную функцию, получаем

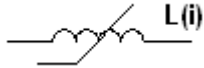
$$i(t) = \frac{dq}{dU} \cdot \frac{dU}{dt}.$$

Функцию $C(U) = dq/dU$ называют вольт-фазовой характеристикой. С учетом этого модель нелинейной емкости имеет вид

$$i = C(U) \cdot \frac{dU}{dt}.$$

К реальным объектам, моделями которых являются нелинейные емкости, относятся, например, варикап.

Нелинейная индуктивность

Обозначение - 

Нелинейная индуктивность определяется исключительно связью потока сцепления ψ и тока i : $\psi = \psi(i)$.

Поскольку напряжение индукции, возникающее при изменении магнитного поля, равно производной от потока сцепления: $U(t) = d\psi/dt$, то дифференцируя ψ как сложную функцию, получаем

$$U(t) = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt}.$$

Величина $L(i)$ называется нелинейной индуктивностью.

Нелинейными индуктивностями описываются катушки с ферромагнитными сердечниками.

Аналог цепей с безынерционными элементами

Цепи, не содержащие емкостей и индуктивностей, т. е. энергоемких элементов, называются резистивными. Их математическими моделями являются системы нелинейных уравнений.

В общем случае также уравнения не решаются аналитически. Для их решения используют графоаналитический и численный методы.

Обычно при анализе нелинейных резистивных цепей рассматривают задачу в такой формулировке.

Задана цепь с известными характеристиками НЭ, параметрами линейных элементов и параметрами источников постоянного напряжения и тока. Пусть на входе цепи действует один источник переменного сигнала $S(t)$. Требуется найти реакцию цепи $y(t)$, т. е. напряжение или ток на ее входе (1) или выходе (2).

Если сигнал – напряжение, а отклик – ток, то цепь можно рассматривать как двухполюсник а), если это пара напряжений или пара токов, то как четырехполюсник б).



а)



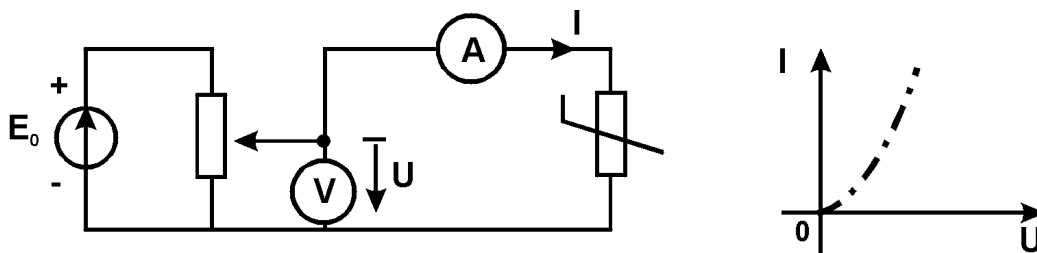
б)

$$S(t) = U(t); S(t) = i(t) \quad S(t) = U_1(t); S(t) = i_1(t); S(t) = i_1(t)$$

$$y(t) = i(t); y(t) = U(t) \quad y(t) = U_2(t); y(t) = i_2(t); y(t) = U_2(t).$$

Выходной характеристикой резистивного двухполюсника называют зависимость мгновенного значения реакции на входе $y(t)$ от мгновенного значения входного сигнала $S(t)$, т. е. функцию $y=y(S)$. Чаще всего эту функцию называют передаточной характеристикой резистивного двухполюсника и определяют последующую зависимость мгновенного значения реакции на выходе $y(t)$ от мгновенного значения входного сигнала $S(t)$, т. е. функцию $y(S)$ (это одно и то же). Эти характеристики можно измерить экспериментально, подключив в качестве $S(t)$ источник регулируемого напряжения (тока) и регистрируя значения выходной величины в зависимости от входной.

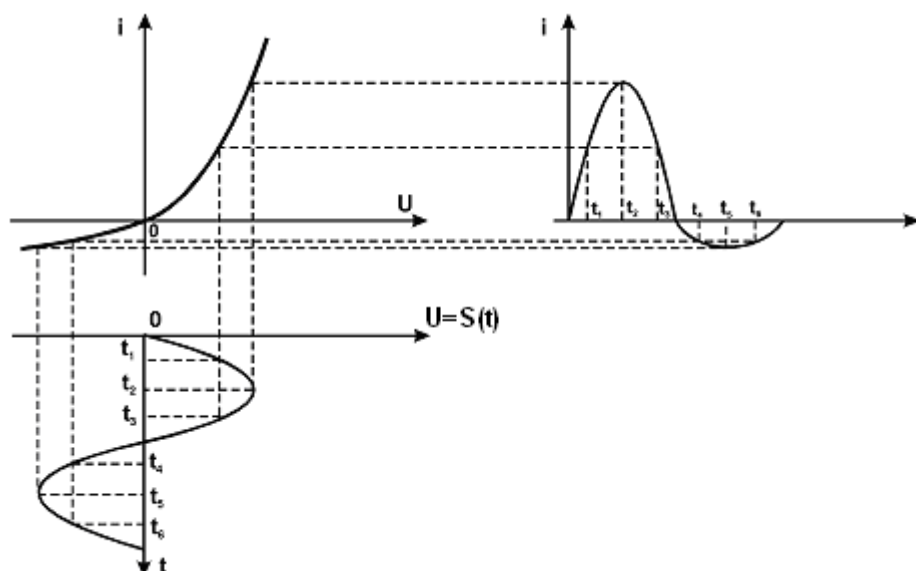
На приведенном ниже рисунке показаны схема и результат экспериментального измерения ВАХ НЭ (двухполюсника).



Графический метод анализа

Рассмотрим применение графического метода на примере анализа процесса прохождения тока через диод. Решение начинают с построения характеристики нелинейного элемента в системе координат вход-выход. В данном случае этой характеристикой является ВАХ, входной величиной - напряжение на двухполюснике, а выходной величиной - ток через него. Теперь необходимо построить график входного процесса (здесь напряжения) как зависимость от времени и расположить оси координат согласованно с осью входных величин. При этом ось времени оказывается направленной вниз. Далее справа строят оси системы координат для получения графика выходного процесса. Ось входной величины (в данном случае тока) располагается также согласованно по отношению к осям ВАХ. Выберем произвольный момент времени t_1 и отложим соответствующую ему точку на осях t входной и выходной величин. Спроецируем точку, соответствующую мгновен-

ному значению входного напряжения, на график ВАХ и проведем горизонтальную прямую до пересечения с перпендикуляром к оси t в точку t_1 графика выходного процесса. Это будет первая точка, показывающая мгновенное значение выходного тока в момент времени t_1 . Аналогично в другие моменты времени точки с графика входного процесса переносят в систему координат для выходного процесса. В результате получают весь график выходного тока.



Графоаналитический метод

Графический метод прост, но громоздок и не точен при получении количественных результатов. Для количественных оценок используют аппроксимацию графических входных или передаточных характеристик аналитически заданными функциями. Такой метод называется графоаналитическим. Наиболее типична аппроксимация многочленами

$$y(S) = a_0 + a_1 S^2 + \dots + a_n S^n .$$

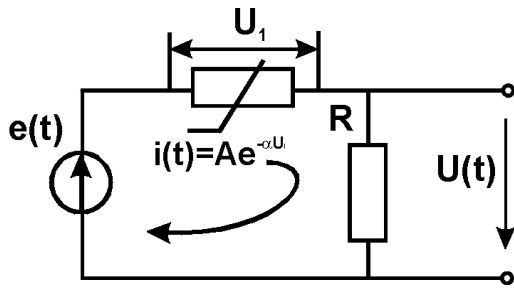
Если известны коэффициенты аппроксимирующего многочлена для характеристики безынерционного нелинейного четырехполюсника, то выходной сигнал находят простой подстановкой:

$$y(t) = a_0 + a_1 [S(t)] + a_2 [S(t)]^2 + \dots + a_n [S(t)]^n .$$

Численные методы

Если для безынерционного нелинейного четырехполюсника нельзя или очень трудно задать графически входную или передаточную характеристику, то графический и графоаналитический методы неприменимы. В этих случаях составляют полную систему уравнений цепи по законам Кирхгофа и Ома и находят ее численные методы.

Поясним этот подход на примере. Пусть задана резистивная цепь, схема которой приведена на рисунке:



Составим уравнение цепи:

$$U(t) = R \cdot i(t) = R \cdot i[U_1(t)] = R \cdot A \cdot e^{-\alpha[e(t) - U(t)]},$$

или

$$U(t) = R \cdot A \cdot e^{-\alpha[e(t) - U(t)]} = 0.$$

Это нелинейное уравнение, решить которое относительно $U(t)$ можно для любого значения $e(t)$ методом простых итераций, методом Ньютона или любым другим методом численного решения нелинейных уравнений.

7.2. Формирование и демодуляция радиосигналов. Преобразование частоты

Одним из важнейших свойств нелинейных цепей является преобразование спектра входных сигналов. Оно заключается в том, что при действии на входе цепи гармонического или импульсного сигнала, состоящего из суммы нескольких гармонических колебаний различных частот, реакция (т. е. ток или напряжение любой ветви) будет содержать не только гармоники воздействия, но и новые гармоники, которых нет во входном сигнале.

Такое преобразование спектра принципиально невозможно в линейных цепях с постоянными параметрами (RLC - цепях). Там токи и напряжения в любой ветви состоят только из гармоник, содержащихся во входном сигнале.

Пусть задана нелинейная резистивная цепь с передаточной (или входной) характеристикой, заданной в виде степенного полинома. Пусть это, например, ВАХ в виде

$$i(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots + a_n U^n.$$

Рассмотрим сначала действия на цепь гармонического сигнала:

$$U(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Подставив второе выражение в первое, получаем

$$i(t) = a_0 + a_1 U \cos(\omega t + \varphi_u) + a_2 U^2 \cos^2(\omega t + \varphi_u) + \dots$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos^2(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_u);$$

$$\cos^3(\omega t + \varphi_u) = \frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi_u) + \frac{1}{4} \cos 3(\omega t + \varphi_u).$$

Как видно, гармоническая функция степени n эквивалентна сумме функций кратных частот, причем четная степень содержит только четные гармоники, нечетная - только нечетные. Очевидно, что наибольшая частота гармоник, равная $n\omega$, определяется старшей степенью полинома характеристики цепи:

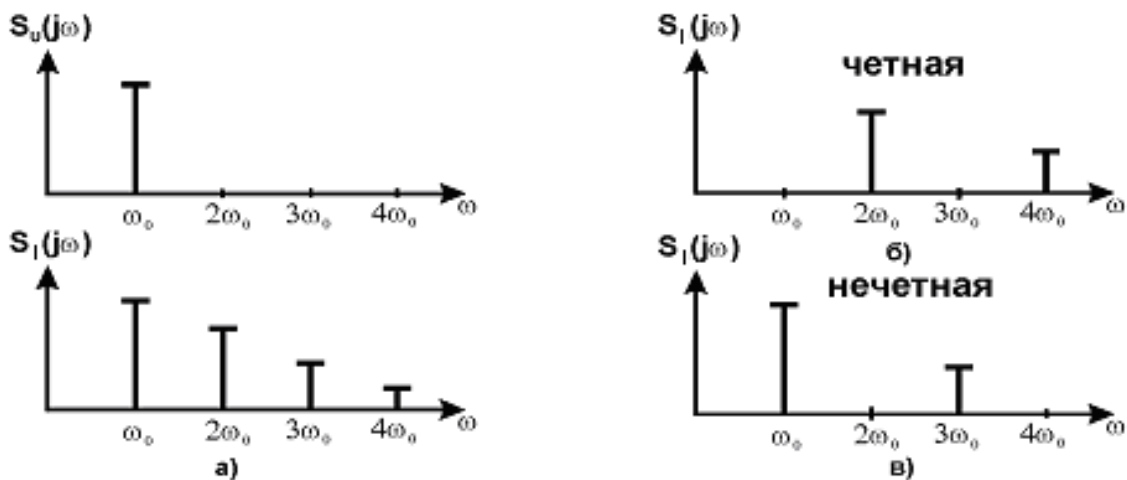
$$i(t) = a_0 + a_1 U \cos(\omega t + \varphi_n) + \frac{a_2 U^2}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_n) + \\ + \frac{3a_3 U^3}{4} \cos(\omega t + \varphi_n) + \frac{a_3 U^3}{4} \cos 3(\omega t + \varphi_n) + \dots$$

В общем виде можно записать:

$$i(t) = I_0 + \sum_{l=1}^n I_l \cos(l\omega t + \varphi_l);$$

$$I_l = \begin{cases} f_1(a_0, \dots, a_{2i}, \dots, U^2, U^4, \dots), & l - \text{четные} \\ f_2(a_1, \dots, a_{2i+1}, \dots, U, U^3, \dots), & l - \text{нечетные} \end{cases}$$

На следующем рисунке изображен дискретный спектр входного и выходного сигналов для нелинейности общего вида (а), четной (б) и нечетной (в) функций $i(U)$.



Рассмотрим теперь действие на цепь сигнала, состоящего из суммы двух гармонических функций с частотами ω_1 и ω_2 :

$$U = U_1 + U_2 = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Реакция цепи будет состоять из суммы степеней двучленов:

$$i = a_0 + a_1(U_1 + U_2) + a_2(U_1 + U_2)^2 + \dots + a_n(U_1 + U_2)^n.$$

При $n=2, 3$ степени двучленов будут такими:

$$(U_1 + U_2)^2 = U_1^2 + 2U_1U_2 + U_2^2;$$

$$(U_1 + U_2)^3 = U_1^3 + 3U_1U_2^2 + 3U_1^2U_2 + U_2^3.$$

В отличие от воздействия одного сигнала при воздействии сигнала в виде суммы двух функций в отклике имеются еще и дополнительные слагаемые в виде произведения степеней $(U_1^{(n-m)}U_2^m)$, где $m=1,2,\dots,n$. При этом все степени гармонических функций дают суммы гармоник кратных частот.

Произведения двух гармонических функций дают гармонические функции с частотами, равными разностям и суммам частот сомножителей. В качестве первого приближения можно записать:

$$U_1U_2 = U_1U_2 \cos(\omega_1t + \varphi_1)\cos(\omega_2t + \varphi_2) =$$

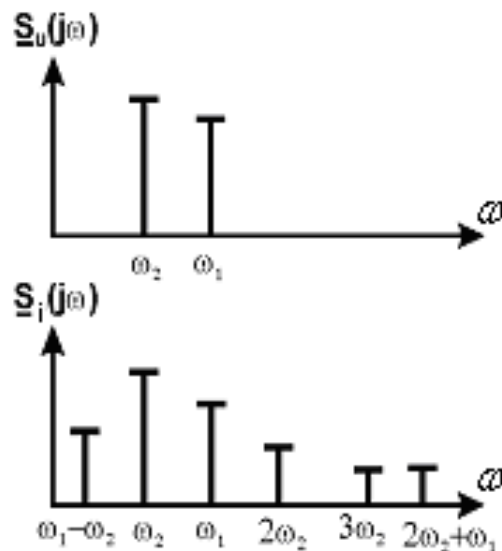
$$= \frac{1}{2}U_1U_2 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)] \};$$

$$U_1U_2^2 = U_1U_2^2 \cos(\omega_1t + \varphi_1)\cos^2(\omega_2t + \varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{2}U_1U_2^2 \left\{ \cos(\omega_1t + \varphi_1) + \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 - 2\omega_2)t + (\varphi_1 - 2\varphi_2)] + \frac{1}{2}\cos[(\omega_1 + 2\omega_2)t + (\varphi_1 + 2\varphi_2)] \right\}.$$

Таким образом, в произведении степеней имеем в общем случае частоты $w_{mn} = \pm m \omega_1 \pm n \omega_2$, $m=1, 2, \dots, n$. Колебания с частотами w_{mn} называются комбинационными, а сумма $|m| + |n|$ - порядком комбинационного колебания.

Спектр сигнала на выходе безынерционного нелинейного четырехполюсника в случае действия на его входе суммы двух гармонических сигналов приведен на следующем рисунке.



Таким образом, в общем случае при действии суммы двух гармонических сигналов отклик цепи содержит колебания комбинационных частот

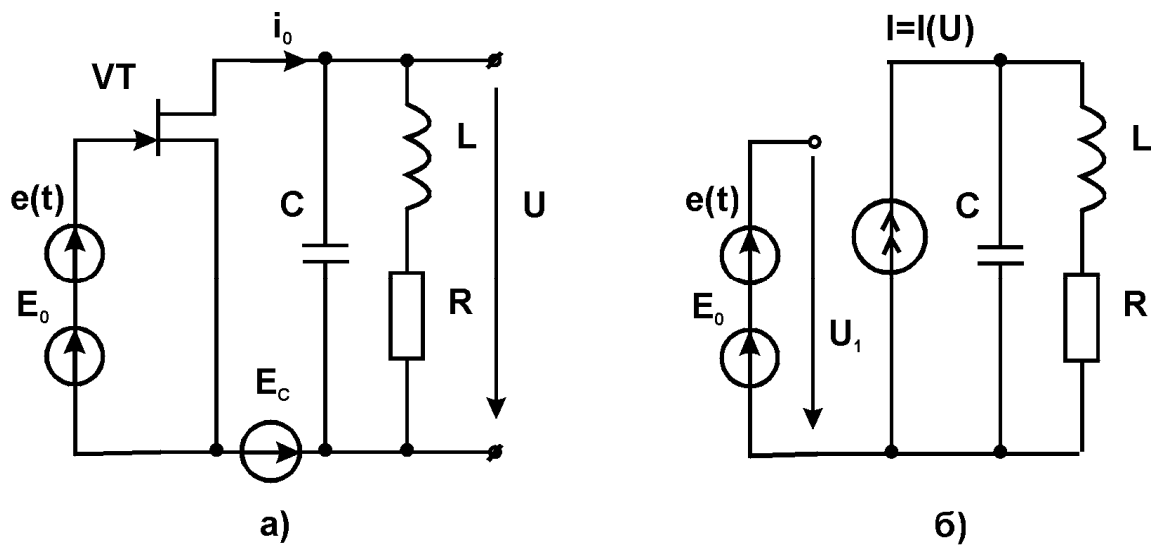
$$i(t) = \sum_m \sum_n I_{mn} \cos[(m\omega_1 - n\omega_2)t + \varphi_{mn}] \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Появление в спектре выходного сигнала нелинейного элемента составляющих, которых не было во входном сигнале, широко используют в технике.

Важнейшими применениями этого явления являются умножение частоты, модуляция и детектирование (демодуляция). Во всех устройствах, в которых производятся эти преобразования, нелинейные элементы используются совместно с линейными цепями - фильтрами.

Умножение частоты

Умножение частоты осуществляют преобразования вида $A \cos \omega_0 t \rightarrow B \cos n \omega_0 t$. Такие устройства представляют собой соединения нелинейных элементов и полосовых фильтров, настроенных в резонанс на частоту выделяемой гармоники. Они могут быть построены, например, на базе резонансного усилителя, работающего в режиме с отсечкой тока стока.



Пусть $e(t) = U_0 \cos \omega_0 t$. Найдем сначала ток $i_0(t)$. Допустим, что нелинейная характеристика полевого транзистора описывается квадратичным полиномом

$$I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i_0(t) &= I[U(t)] = a_0 + a_1(U_0 \cos \omega_0 t + E_0) + a_2(U_0 \cos \omega_0 t + E_0)^2 = \\ &= a_0 + a_1 U_0 \cos \omega_0 t + a_1 E_0 + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 \cos 2\omega_0 t + \\ &+ 2a_2 U_0 E_0 \cos \omega_0 t + a_2 E_0^2. \end{aligned}$$

Выберем E_0 так, чтобы в отсутствие входного переменного сигнала ток был равен нулю, т. е. чтобы

$$a_0 + a_1 E_0 + \frac{1}{2} U_0^2 a_2 + a_2 E_0^2 = 0.$$

Тогда при действии переменного напряжения ток будет равен

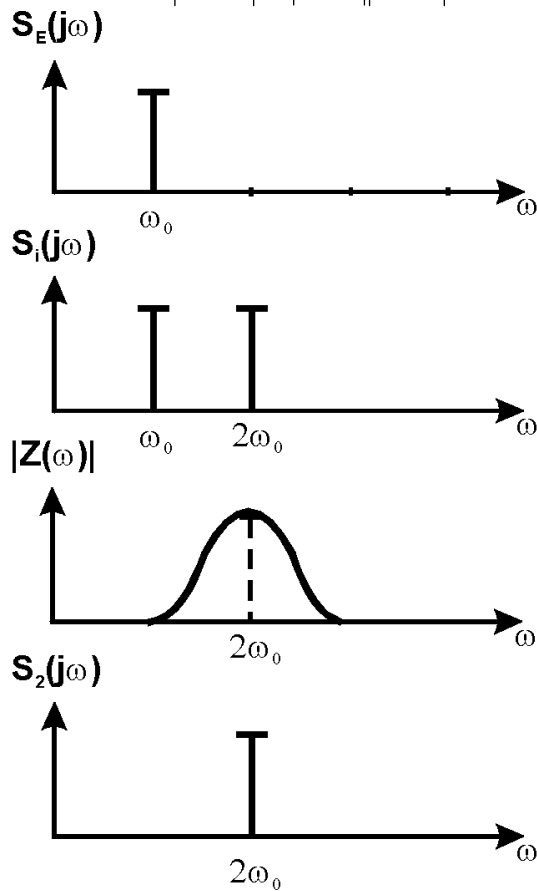
$$i_0(t) = (a_1 U_0 + 2a_2 U_0 E_0) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 \cos 2\omega_0 t.$$

Рассмотрим спектры входного сигнала $e(t)$ и ток $i_0(t)$, последний состоит из

двух гармоник. Падение напряжения на контуре, как и на любом линейном двух-полюснике, может быть рассчитано в частотной области:

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_i(\omega)\dot{Z}(\omega);$$

$$|\dot{S}_2(\omega)| = |\dot{Z}(\omega)||\dot{S}_i(\omega)|.$$



Сопротивление параллельного RLC контура описывается соотношением

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC};$$

$$|\dot{Z}(\omega)| = \frac{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2]^{1/2}}.$$

Зависимость $|\dot{Z}(\omega)|$ при малых отклонениях R/L , т. е. при большой добротности $Q = \sqrt{L/C}/R$ и $(\sqrt{LC})^{-1} = 2\omega_0 = \omega_p$, имеет явно выраженный избирательный характер. Так, для частоты ω_0 имеем $|\dot{Z}(\omega)| \approx 0$ и $\dot{S}_2(\omega_0) \approx 0$. На резонансной частоте $\omega_p = 2\omega_0$ получаем

$$|\bar{Z}(2\omega_0)| = \sqrt{\frac{R^2 + (2\omega_0)^2 L^2}{(2\omega_0)^2 R^2 C^2}} \approx \frac{\rho}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx Q \cdot \rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление. Следовательно, спектр выходного сигнала будет содержать одну гармонику с частотой $2\omega_0$:

$$|\dot{S}_2(2\omega_0)| \approx Q \cdot \rho \frac{1}{2} a_2 U_0^2.$$

Если требуется умножение частоты на 3, т. е. $n=3$, то необходимо иметь нелинейность $I(U)$ не ниже многочлена 3-го порядка и настраивать RLC-контур на частоту $3\omega_0$. Аналогично для умножения на n требуется порядок нелинейности не ниже n .

Амплитудная модуляция

Амплитудные модуляторы производят преобразования вида

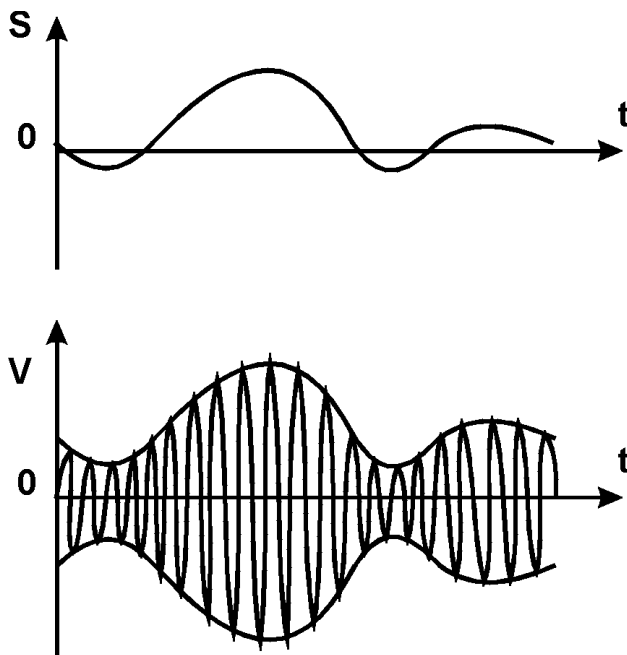
$$S(t) \rightarrow A[1 + m \cdot S(t)]\cos\omega_0 t.$$

Процесс амплитудной модуляции состоит в преобразовании “медленного” сигнала $S(t)$, называемого модулирующим, в быстро осциллирующий сигнал, амплитуда которого меняется по закону $S(t)$:

$$V(t) = A \left[1 + m \frac{S(t)}{S_{\max}} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Здесь $A\cos\omega_0 t$ - функция, называемая несущим колебанием, m - коэффициент модуляции ($m \leq 1$), где $m = \frac{S_{\max}}{A}$; $S_{\max} = \max|S(t)|$, где $S(t)$ - информационная функция.

Например, если $S(t)$ - модулирующий сигнал, то соответствующий ему АМ-сигнал имеет вид следующего графика.



Определим спектр амплитудно-модулированного колебания.

Пусть АМ-колебание описывается функцией $V(t)=f(t)\cos\omega_0 t$. На основании прямого преобразования Фурье спектр этой функции будет содержать 2 группы гармоник: суммарной и разностной частот

$$\begin{aligned}\dot{S}_V(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \dot{S}_f(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}_f(\omega + \omega_0).\end{aligned}$$

Поскольку по определению в выражении $\dot{S}_f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ есть спектр функции $f(t)$, то последняя формула означает, что при АМ-модуляции спектр НЧ - колебания переносится в область ВЧ - колебания и раздваивается.

В нашем случае $f(t) = A + Am\dot{S}(t)$, где $S'(t) = S(t)/Sm$. Спектр такой функции состоит из двух частей: $\dot{S}_f(\omega) = 2\pi A\delta(\omega) + Am\dot{S}(\omega)$. Следовательно, на основании предыдущей формулы спектр АМ-колебания будет иметь вид

$$\bar{S}_V(\omega) = \pi A\delta(\omega + \omega_0) + \pi A\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} Am\dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} Am\dot{S}(\omega + \omega_0).$$

На приведенном ниже рисунке изображены спектры модулирующего сигнала, несущего и АМ-колебания. Как видно, в результате модуляции спектр информационного сигнала переносится в область несущего колебания.

Процесс амплитудной модуляции является типичным преобразованием спектра сигнала $S(t)$ и может быть осуществлен только в цепи с нелинейным элементом. Поскольку получение АМ-колебания требует двух сигналов - модулирующего $S(t)$ и несущего $A\cos\omega_0 t$, на нелинейный элемент должна действовать сумма этих сигналов.

Включенный последовательно с нелинейным элементом линейный полосовой фильтр (ПФ), например колебательный контур, настроенный на несущую частоту ω_0 , выделяет полосу частот, соответствующую АМ-колебанию.

Проанализируем эту модель.

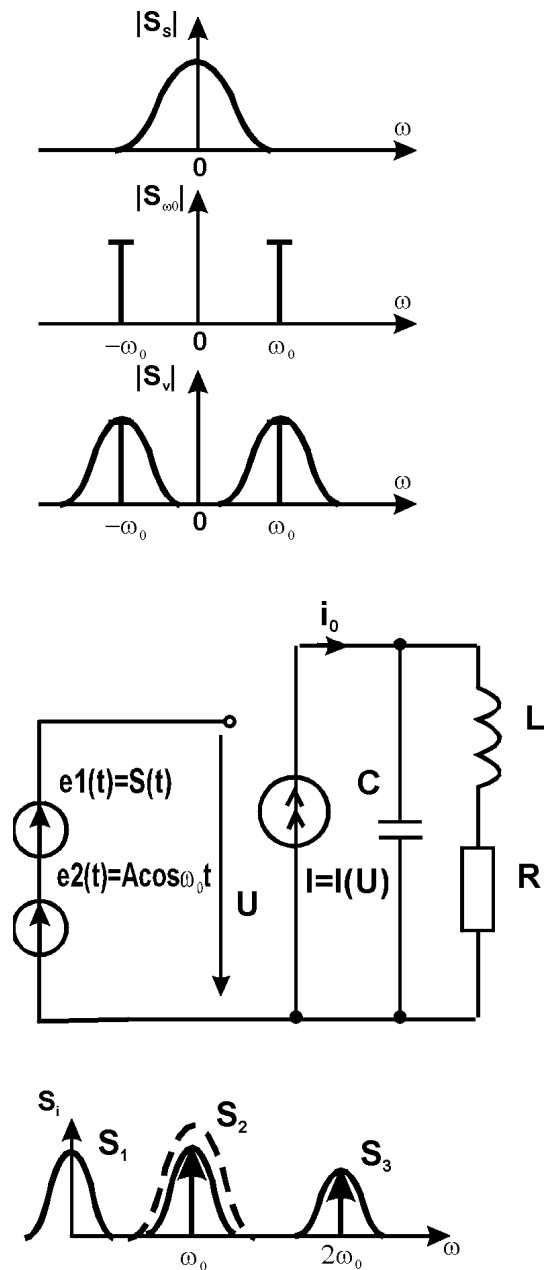
Пусть ВАХ безынерционного нелинейного элемента описывается многочленом второй степени $I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2$.

Определим входной ток полосового фильтра:

$$\begin{aligned}i(t) &= a_0 + a_1 [S(t) + A \cos \omega_0 t] + a_2 [S(t) + A \cos \omega_0 t]^2 = \\ &= a_0 + a_1 S(t) + A a_1 \cos \omega_0 t + a_2 S^2(t) + 2a_2 S(t) + \\ &+ 2a_2 S(t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 A^2 \cos 2\omega_0 t = \\ &a_0 + a_1 S(t) + a_2 S^2(t) + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \\ &+ A[a_1 + 2a_2 S(t)] \cos \omega_0 t + a_2 A^2 \cos 2\omega_0 t.\end{aligned}$$

Рассмотрим спектральный состав тока, полагая, что резонансная частота контура ω_0 много больше максимальной частоты ω_{\max} в спектре $S(t)$. НЧ - спектр

S_1 обусловлен постоянной составляющей $\left(a_0 + \frac{1}{2}a_2A^2\right)$ и членами с $S(t)$ и $S^2(t)$, а спектры S_2 и S_3 образуются сигналами, пропорциональными $\cos\omega_0 t$ и $\cos 2\omega_0 t$ соответственно. Если теперь принять, что полоса пропускания полосового фильтра сосредоточена вблизи ω_0 (пунктир на графике), то он будет выделять колебание, пропорциональное $\cos\omega_0 t$, которое и представляет собой АМ-колебание.



Таким образом, АМ-колебания получаются путем нелинейного сложения сигнала модуляции $S(t)$ и несущего колебания. В результате получается выходное напряжение следующего вида:

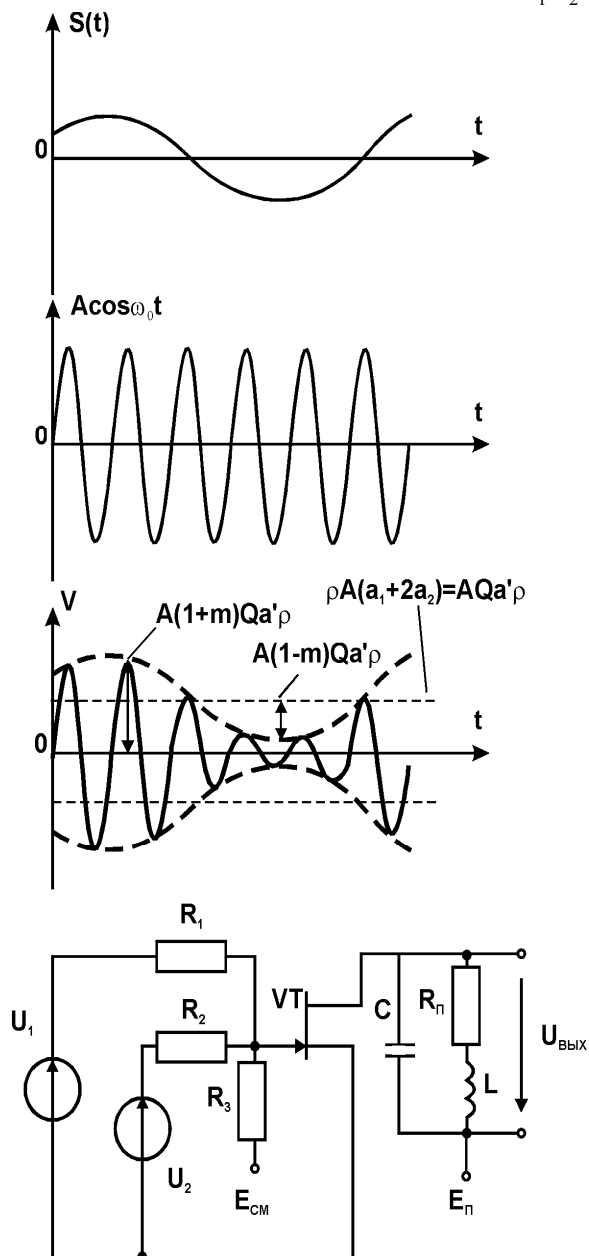
$$a' = (a_1 + 2a_2) / Q.$$

Практической схемой, осуществляющей процесс АМ-модуляции, является,

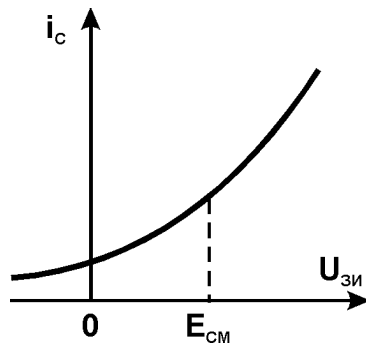
например, следующая схема на полевом транзисторе с предварительным сложением модулирующего и несущего колебаний.

Напряжение между затвором и истоком $U_{ЗИ}$ вычисляется по формуле, полученной на основании законов Кирхгофа в предположении, что $R_{BXVT} \rightarrow \infty$:

$$U_{зи} = \frac{R_3 R_2 U_1 + R_3 R_1 U_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + E_{CM}.$$



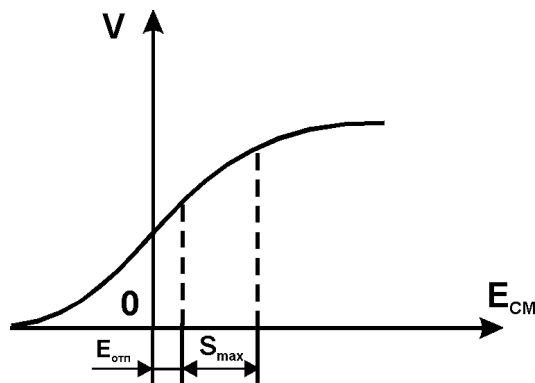
Подбором значений сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 и напряжения смещения E_{CM} осуществляется выбор рабочей точки на передаточной характеристике транзистора. Наилучшим считается такое положение рабочей точки, когда коэффициенты разложения ВАХ в окрестности этой точки обеспечивают максимальное значение коэффициента модуляции по первой гармонике выходного тока.



Модулированный сигнал получается как падение напряжения на колебательном контуре, параметры должны обеспечивать центральную частоту $\omega_p = 1/\sqrt{L/C} = \omega_0$. Сопротивление потерь R_{Π} должно быть таким, чтобы добротность $Q = \sqrt{L/C}/R_n$ цепи была достаточно большой, чтобы полоса пропускания контура $2Dw \ll w_0$ (несущей частоты). С другой стороны, спектр модулированного сигнала не должен искажаться, т. е. необходимо, чтобы $W_m < Dw$, где $2W_m$ - ширина спектра модулирующего колебания. Используя равенство $2Dw = w_0/Q$, получаем неравенства для выбора параметров колебательного контура L, C, R_{Π} :

$$2\Omega_m < R_n / L; \quad R_n \ll \sqrt{L/C}.$$

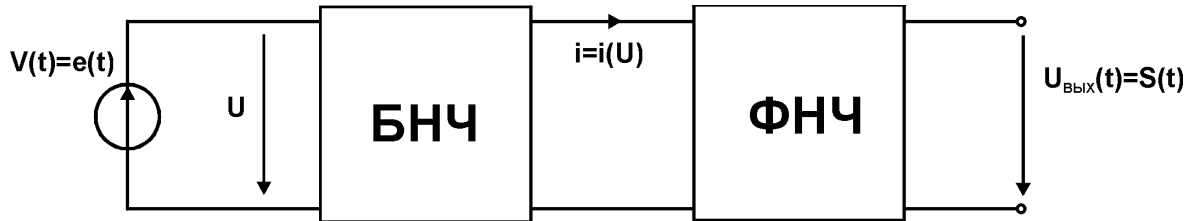
Коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots , определяющие вид нелинейной характеристики транзистора, зависят от выбора постоянного смещения на затворе, задаваемого сопротивлением $R_1, R_2, R_3, E_{см}$. При изменении этого напряжения будет меняться амплитуда $a_1 A Q$ выходного напряжения $V(t)$. Зависимость амплитуды первой гармоники тока на выходе нелинейного элемента (или падение напряжения на колебательном контуре на первой гармонике) от поданного напряжения смещения называют статической модуляционной характеристикой.



Величину $E_{опт}$, оптимальную для рабочего модулятора, выбирают в середине линейного участка статической модуляционной характеристики. Амплитуда сигнала S_{max} не должна выходить за пределы линейного участка модуляционной характеристики. Статическая модуляционная характеристика – это не есть проходная ВАХ транзистора.

Детектирование АМ-колебаний

Процесс, обратный модуляции, называется демодуляцией, или детектированием. При детектировании по колебанию $V(t) = A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t$ необходимо восстановить сигнал $S(t)$. Устройство, реализующее эту операцию, называют амплитудным демодулятором, или детектором. При детектировании следует преобразовать сигнал $V(t)$ так, чтобы потом можно было выделить сигнал $S(t)$. Такое преобразование можно осуществить с помощью безынерционного нелинейного четырехполюсника с последующей низкочастотной фильтрацией.

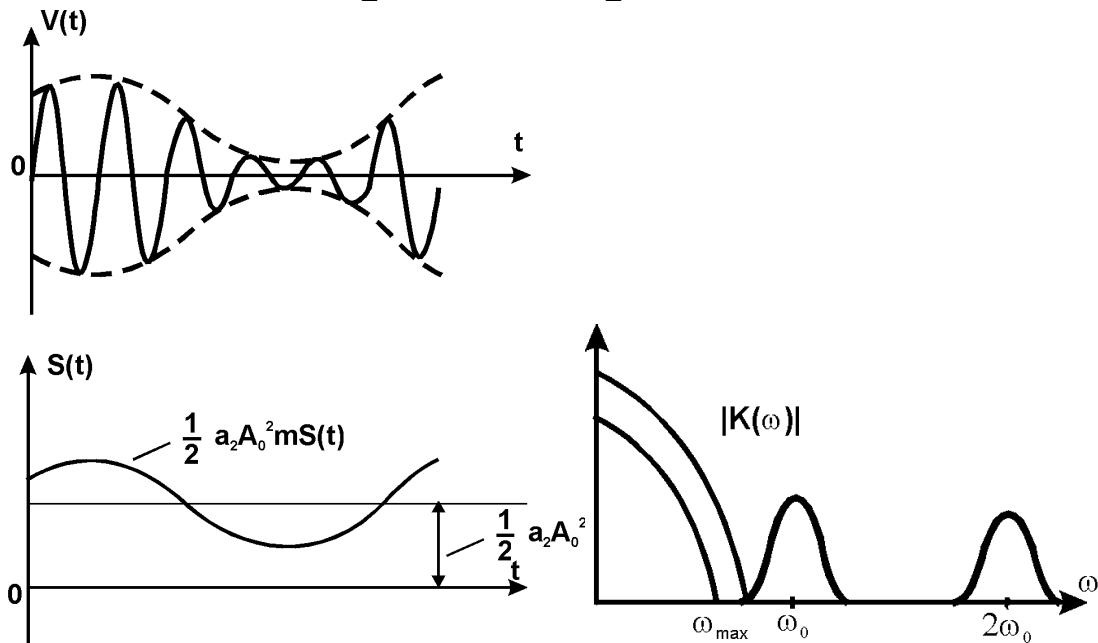


Предположим, что ВАХ БНЧ описывается квадратичной параболой:

$$i(U) = a_1 U + a_2 U^2.$$

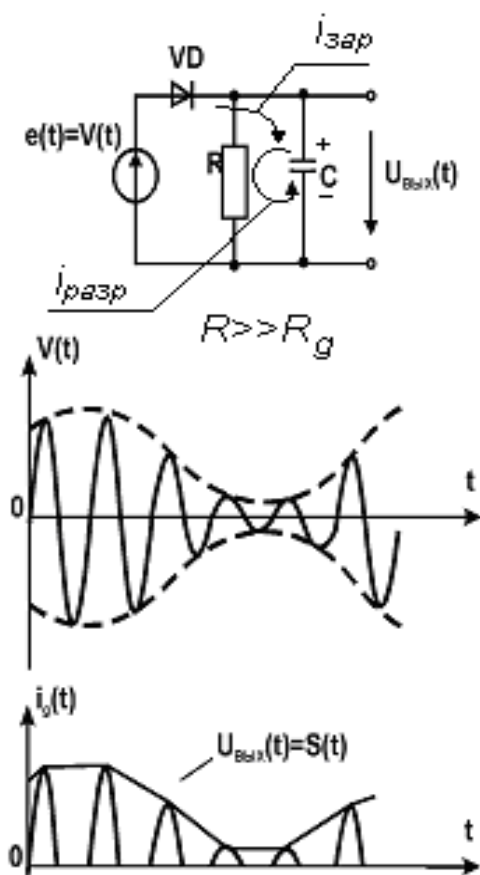
Тогда

$$\begin{aligned} i(t) &= a_1 \{A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t\} + a_2 \{A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t\}^2; \\ i(t) &= a_1 A \cos\omega_0 t + a_1 mS(t) A \cos\omega_0 t + a_2 A^2 [1 + mS(t)]^2 \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t\right) = Aa_1 \cos\omega_0 t + a_1 mS(t) A \cos\omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \\ &+ a_2 A^2 S(t) + \frac{1}{2} a_2 A^2 m^2 S(t) + \frac{1}{2} A^2 [1 + mS(t)] \cos 2\omega_0 t. \end{aligned}$$



Как видно, в спектре этого тока присутствует полезная составляющая тока $S(t)$, которая может быть выделена фильтром нижних частот. На рисунке выше приведен спектральный состав тока при условии, что в спектре сигнала $S(t)$ максимальная частота $\omega_{\max} \ll \omega_0$. В полосе пропускания ФНЧ могут попасть составляющие, пропорциональные $S^2(t)$. Однако при малых m ими можно пренебречь. Фильтр нижних частот отфильтровывает все высшие частоты в спектре тока, и на его выходе имеется сигнал, пропорциональный $S(t)$ с точностью до постоянной составляющей. Постоянная составляющая может быть легко отфильтрована последовательным включением емкости на выходе ФНЧ.

Простейшей практической схемой АМ-детектора может служить диодный детектор.



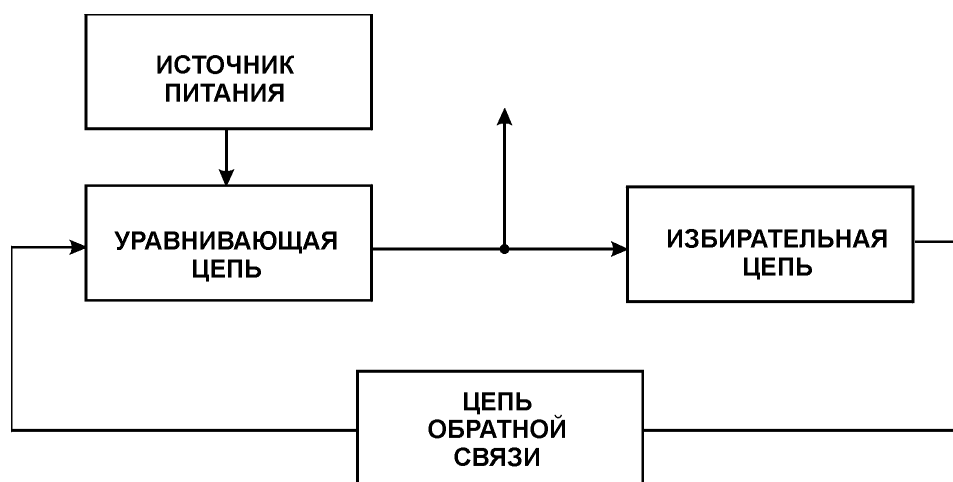
Здесь в качестве ФНЧ используется RC - цепь. Токи всех высших гармоник протекают через емкость, не создавая сколько-нибудь заметного падения напряжения на ней, и $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ будет пропорционально $S(t)$. Заметим, что не всякий нелинейный элемент пригоден для детектирования, например, нельзя использовать только нечетные нелинейности.

8. Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний

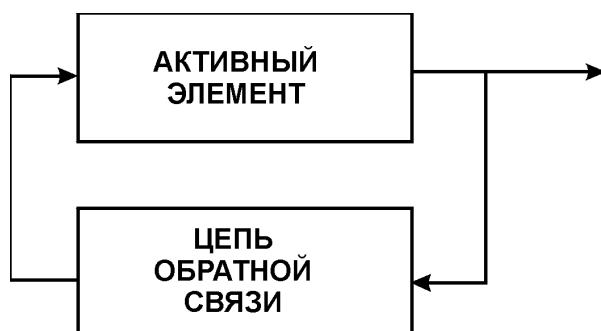
8.1. Автоколебательная система

В цепях, содержащих обратные связи, могут возникнуть изменяющиеся во времени электрические токи без воздействия на эти цепи внешних управляющих сигналов. Такие цепи называют автоколебательными системами, а колебания - автоколебаниями.

Типичная структура автоколебательной системы - это структура с обратной связью, в которой часть выходного сигнала возвращается на вход через цепь обратной связи.



В наиболее общем случае колебательная система включает источник питания, энергия которого и преобразуется в энергию колебаний; цепь управления этим преобразованием; избирательную цепь, служащую для отфильтровывания нужных колебаний, и цепь обратной связи. При анализе таких систем, как правило, источник питания рассматривают как составную часть управляющей цепи (активный управляющий элемент, например, усилитель), а избирательную цепь - как составную часть либо активного элемента (колебательный контур в составе резонансного усилителя), либо цепи обратной связи (RC - автогенератор гармонических колебаний, мультивибратор и т. д.). Таким образом, анализ колебательной системы сводится к анализу активной цепи с обратной связью.



С электротехнической точки зрения активный элемент колебательной системы является нелинейным четырехполюсником, коэффициент передачи которого зависит от действующих в его цепях токов и напряжений, а цепь обратной связи – ли-

нейным четырехполюсником. Эти свойства элементов системы определяют ее принцип действия.

Действительно, при соответствующем выборе параметров система с обратной связью становится неустойчивой. При этом малые амплитуды любых колебаний, существующих в системе, например тепловых или коммутационных колебаний, начинают возрастать. С ростом амплитуды коэффициент передачи активного элемента, как правило, уменьшается, и при некотором его значении нарастание амплитуды колебаний прекращается. Установившееся значение называется стационарным.

При анализе и расчете автоколебательных систем - автогенераторов решают две основные задачи:

1. Определение условий, при которых устройство с обратной связью становится неустойчивым, т. е. самовозбуждается;

2. Определение амплитуды и частоты автоколебаний в стационарном режиме.

Наиболее сложной является вторая задача, в которой исследуется нелинейная система с обратной связью в режиме больших амплитуд, когда нелинейностью пренебречь нельзя. Первую же задачу решить относительно несложно, поскольку при малых амплитудах автоколебаний на начальном этапе процесса нелинейный активный элемент может быть эквивалентно заменен линейной схемой замещения такой, как, например, у обычного линейного усилителя с ОС. Некоторые сведения об условиях самовозбуждения можно получить даже в общем случае, не рассматривая конкретной схемы автогенератора.

Действительно, коэффициент передачи по напряжению линейного четырехполюсника, охваченного обратной связью, определяется формулой

$$\dot{K}_{oc} = \frac{\dot{K}}{1 - \beta \dot{K}},$$

где \dot{K} - коэффициент передачи активного элемента автогенератора, а β - коэффициент передачи по цепи обратной связи.

В соответствии с алгебраическим критерием устойчивости система становится неустойчивой, когда петлевой коэффициент передачи

$$\beta \dot{K} \geq 1.$$

В силу комплексности величин, это соотношение разлагается на два условия:

- условие баланса амплитуд

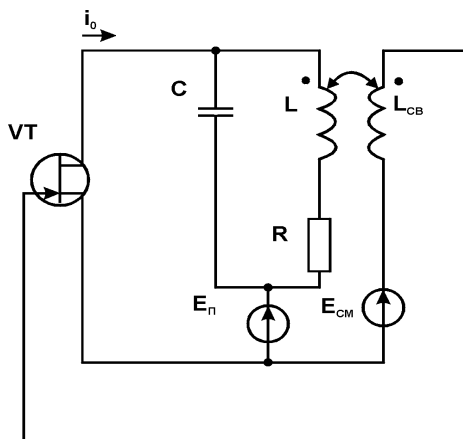
$$\beta K \geq 1;$$

- и условие баланса фаз

$$\varphi_{\beta} + \varphi_K = 2n\pi.$$

Первое из них свидетельствует о том, что автоколебания в системе возможны, если активный элемент компенсирует все потери энергии в системе, включая нагрузку; второе условие требует, чтобы при этом колебания на входе и выходе петли обратной связи были синфазными.

В общем случае параметры K , β , φ_K и φ_β зависят от частоты. Поэтому условия баланса амплитуд и баланса фаз обычно выполняются только для одной частоты или в достаточно узком диапазоне частот. Чтобы ответить на вопрос, на какой частоте возможны колебания, необходимо анализировать конкретную схему.



8.2. Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний

Рассмотрим схему, в которой при определенных условиях могут возникать и существовать автоколебания. Это схема, содержащая полевой транзистор, колебательный контур и индуктивную цепь обратной связи. Будем считать, что ток стока транзистора связан с напряжением затвор-исток нелинейной зависимостью $i_0 = I(U_{зи})$.

В колебательном контуре уравнения, связывающие ток емкости i_C с током индуктивности i_L , записываются в виде системы

$$i_0 = i_C + i_L;$$

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}; \quad L \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L = U_C;$$

$$C \frac{dU_C}{dt} = -i_L + i_0; \quad L \frac{di_L}{dt} = -R \cdot i_L + U_C$$

или как одно уравнение

$$L \cdot C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \cdot C \frac{di_L}{dt} + i_L = i_0.$$

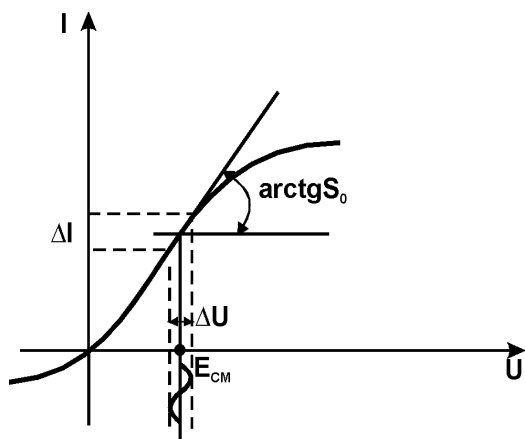
Для цепи обратной связи имеем

$$U = U_C(t) = M \frac{di_L}{dt} + E_M.$$

Следовательно, полную систему уравнений цепи можно записать таким образом:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} i_L = \frac{1}{L \cdot C} I \left(E_M + M \frac{di_L}{dt} \right),$$

или в развернутом виде



$$\left. \begin{aligned} C \frac{dU_C}{dt} &= -i_L + i_0; \\ L \frac{di_L}{dt} &= -R \cdot i_L + U_C; \\ M \frac{di_L}{dt} &= U - E_{CM}; \quad I(U) = i_0 \end{aligned} \right\}$$

После включения источников постоянного напряжения в цепи начинаются заряд емкости и протекание тока в индуктивности, причем начальные значения $i_L(t)$ и $U_C(t)$ весьма малы. Напряжение $U(t)$ при этом также будет незначительно отличаться от E_{CM} , и зависимость $I(U)$ может быть существенно упрощена.

Пусть $I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots$. Так как

$$M \frac{di_L}{dt} = \Delta U = U - E_{CM},$$

то

$$\begin{aligned} I(\Delta U) &= a_0 + a_1(E_{CM} + \Delta U) + a_2(E_{CM} + \Delta U)^2 + \dots = \\ &= a'_0 + a'_1 \Delta U + a'_2 (\Delta U)^2 + \dots \end{aligned}$$

Если принять, что

$$|\Delta U| \ll |E_{CM}|, \quad |\Delta i_0| = |i_0(t) - I(E_{CM})| \ll I(E_{CM}),$$

то можно линеаризовать зависимость $i_C(t) - I(E_{CM}) = a'_1 \Delta U = S_0 \Delta U$, где S_0 - начальная крутизна, равная тангенсу угла наклона касательной к графику $I(U)$ в точке $U = E_{CM}$.

Дифференциальное уравнение для тока $\Delta i_L = [i_L(t) - I(E_{CM})]$ будет таким:

$$\frac{d^2 \Delta i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d \Delta i_L}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \Delta i_L = \frac{1}{L \cdot C} S_0 \cdot M \frac{d \Delta i_L}{dt}$$

или

$$\frac{d^2 \Delta i_L}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(R - \frac{S_0 \cdot M}{C} \right) \frac{d \Delta i_L}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \Delta i_L = 0.$$

Обозначим $\alpha_3 = \frac{1}{2 \cdot L} \left(R - \frac{S_0 \cdot M}{C} \right)$. Тогда последнее уравнение можно записать в

виде

$$\frac{d^2 \Delta i_L}{dt^2} + 2 \cdot \alpha_3 \frac{d \Delta i_L}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \Delta i_L = 0.$$

Это линеаризованное уравнение колебательного процесса в автогенераторе

на стадии возникновения и нарастания колебаний. Его решение определяет закон суммирования амплитуды колебаний:

$$\Delta i_L = A \cdot e^{-\alpha_{\mathcal{E}} t} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

и их частоту

$$\omega = [1/(LC - \alpha_{\mathcal{E}}^2)]^{1/2}.$$

Начальные значения амплитуды и фазы колебаний можно найти из начальных условий. Но в рассматриваемом случае исходными следует считать случайные флуктуации токов и напряжений, поэтому особого значения определения их величин не имеют.

Более важным является другое. Если $\alpha_{\mathcal{E}} > 0$, то какой бы ни была начальная флуктуация тока, процесс в цепи будет затухать. Если же $\alpha_{\mathcal{E}} < 0$, то сколь угодно малая начальная флуктуация тока будет нарастать с течением времени.

В первом случае цепь является устойчивой. Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha_{\mathcal{E}} \pm \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}^2 - 1/LC}$$

имеют отрицательную действительную часть.

Во втором случае цепь неустойчива. Неустойчивость может привести к автоколебаниям в цепи. Условием возникновения автоколебаний является положительность действительной части корней характеристического уравнения цепи.

Рассмотрим физический смысл условия неустойчивости. Согласно приведенным выше рассуждениям для возникновения автоколебаний необходимо иметь $\alpha_{\mathcal{E}} < 0$, т. е.

$$\frac{1}{2 \cdot L} \left(R - \frac{S_0 \cdot M}{C} \right) < 0, \quad R < \frac{S_0 \cdot M}{C}.$$

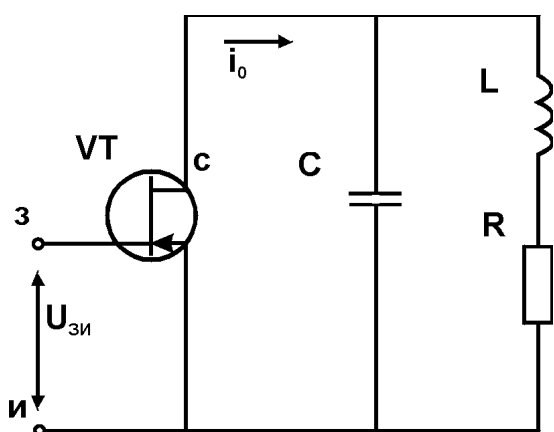
Соппротивление потерь в цепи, т. е. превращение энергии колебаний в теплоту, должно быть меньше некоторого значения, обусловленного крутизной характеристики активного элемента и коэффициентом обратной связи. Очевидно, что это условие эквивалентно условию баланса амплитуд. Фазовое условие существования автоколебаний в данном анализе трансформировалось в выражение для частоты колебаний.

Полученное уравнение справедливо только для малых приращений $\Delta i_L(t)$. Поэтому решение в виде растущей экспоненты справедливо для цепи только на начальном этапе развития процесса автоколебаний. Амплитуда этих колебаний будет возрастать не бесконечно, а достигнет некоторого стационарного значения. Для расчета стационарной амплитуды и частоты колебаний в установившемся

режиме используют другой метод, называемый гармонической линеаризацией.

8.3. Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации

В методе гармонической линеаризации нелинейный резистивный четырехполюсник, включая и избирательный фильтр, заменяется некоторым эквивалентным линейным четырехполюсником с комплексной частотной характеристикой, зависящей от амплитуды входного сигнала. Рассмотрим, как осуществляется такая замена.



Пусть имеется цепь, состоящая из полевого транзистора с колебательным контуром, включенным в цепь стока. Как и прежде, нелинейная зависимость тока стока от напряжения затвор-исток задается многочленом $i_0 = I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots$. Можно показать (см. след. раздел), что если напряжение затвор-исток гармоническое - $U_{зи} = U_0 \cos(\omega_0 t + j_0)$, то ток истока будет определять гармоники с частотами $\omega_i = i\omega_0$:

$$i_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

Если колебательный контур настроен на частоту первой гармоники

$$\omega_i = \omega_0 = \omega_p = 1/\sqrt{LC},$$

то на частоте ω_0 сопротивление контура

$$Z(\omega_0) \approx \rho \cdot Q, \quad \rho = \sqrt{L/C}.$$

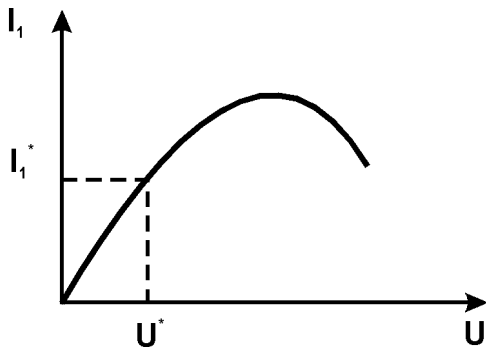
На частотах $[(0, 2, 3 \dots n) \omega_0]$ сопротивление контура будет близко нулю. При этом ток в индуктивности

$$I_{mL} \approx I_1 \rho \cdot Q / (\omega_0 L) \approx I_1 Q,$$

где I_1 - амплитуда первой гармоники тока в нелинейном элементе. В свою очередь, амплитуда тока первой гармоники в нелинейном элементе зависит от вида характеристики этого элемента $I(U)$, т. е. от коэффициентов $a_1, a_3, a_5 \dots$ и т. д., и от амплитуды входного сигнала U . Поэтому

$$I_1 = I_1(a_1, a_3, a_5 \dots, U).$$

Эта зависимость для заданного нелинейного элемента называется колебательной характеристикой. Для нелинейного четырехполюсника, описываемого многочленом третьей степени, колебательная характеристика имеет следующий вид.



Учитывая сказанное и принимая в качестве входного сигнала гармоническое колебание, для тока стока будем иметь

$$i_0(t) = Q_0 + \frac{1}{2}a_2U^3 + a_1U \cos \omega_0 t + \frac{3}{4}a_3U^3 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}a_2U^2 \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{4}a_3U^3 \cos 3\omega_0 t.$$

Относительно первой гармоники получаем

$$I_1(U) = a_1U + \frac{3}{4}a_3U^3 = K(U) \cdot U,$$

где $K(U) = a_1 + 3a_3U^2/4$ - коэффициент передачи (крутизна ВАХ) нелинейного безынерционного элемента на первой гармонике (проводимость).

Таким образом, для каждой конкретной точки $U^* = \text{const}$ колебательной характеристики, для которой $K(U^*) = \text{const}$, зависимость тока первой гармоники от входного напряжения имеет линейный характер $I_1^* = K^* U^*$.

Вернемся к схеме рассматриваемого автогенератора гармонических колебаний. Разомкнем цепь обратной связи и подключим по входу транзистора независимый источник гармонического напряжения $e(t)$.

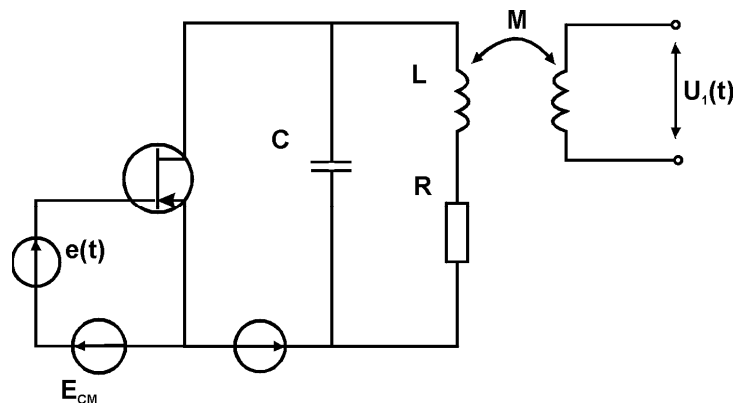
Пусть $e(t) = U \cos \omega_0 t$, $\omega_0 = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Тогда согласно методу гармонической линеаризации ток в индуктивности

$$i_L(t) = I_1 \cdot Q = I_1(U) \cdot Q \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

где φ_1 - сдвиг фазы между напряжением U_1 и током i_L . Напряжение

$$U_1(t) = M di_L / dt = Q \cdot M \cdot \omega_0 I_1(U) \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \pi/2).$$

Предположим, что амплитуда этого напряжения равна амплитуде входного напряжения, т. е. $U = Q \cdot M \cdot \omega_0 I_1(U)$, а $\varphi_1 + \pi/2 = 2n\pi$.



Тогда, если мгновенно отключить внешний источник $e(t)$ и замкнуть цепь обратной связи, то колебания в цепи будут продолжаться, как будто бы ничего не изменилось. Это условие стационарного режима: при обходе по петле обратной связи амплитуда остается неизменной, а сдвиг фаз кратен 2π .

Первое условие, как и ранее, является условием баланса амплитуд, второе - условием баланса фаз:

$$K(U) \cdot K_{OC}(\omega_0) = 1,$$

$$\varphi_K(\omega_0) + \varphi_{OC}(\omega_0) = 2\pi n.$$

Здесь $K(U)$ - коэффициент передачи (крутизна ВАХ) безынерционного нелинейного элемента по первой гармонике; $K_{OC}(\omega_0)$ - коэффициент передачи цепи обратной связи; φ_K - фазовый сдвиг нелинейного элемента, а $\varphi_{OC}(\omega_0)$ - фазовый сдвиг в цепи обратной связи.

Из приведенных выше уравнений определяются стационарная амплитуда U и стационарная частота ω_0 колебаний. Для рассматриваемой цепи имеем

$$U = Q \cdot M \cdot \omega_0 \left(Q_1 + \frac{1}{4} a_3 U^2 \right) U;$$

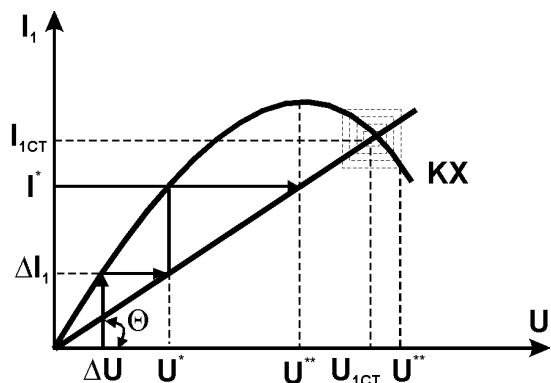
$$Q \cdot M \cdot \omega_0 \left(a_1 + \frac{1}{4} a_3 U^2 \right) = 1$$

$$U_{CT} = \sqrt{\frac{4}{Q \cdot M \cdot \omega_0} (1 - Q \cdot M \cdot \omega_0 \cdot a_1)};$$

$$\varphi_1 \approx \pi/2; \quad \omega_0 = \omega_p = 1/\sqrt{LC}.$$

Графический метод анализа стационарного режима

Понятие колебательной характеристики линейной цепи позволяет определить стационарную амплитуду в цепи с обратной связью графическим методом. По определению, колебательная характеристика есть зависимость амплитуды первой гармоники выходного тока I_1 нелинейного элемента от амплитуды U входного гармонического напряжения. Поэтому для графического решения уравнения баланса амплитуд необходима характеристика обратной связи, представляющая собой зависимость амплитуды напряжения обратной связи U от амплитуды тока I_1 . Поскольку цепь обратной связи линейная, искомая зависимость



представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угол наклона ее зависит от способа реализации обратной связи. В нашем случае $U = Q \cdot M \cdot \omega_0 I_1(U)$ и $\Theta = \text{arcctg } M \cdot Q \cdot \omega_0$ - угол между осью абсцисс и прямой обратной связи. Графики будут иметь две точки пересечения - начало координат и некоторую точку $U_{ст}, I_{ст}$. Эти точки соответ-

ствуют двум возможным стационарным состояниям цепи: первая - отсутствию колебаний, вторая - стационарным автоколебаниям с амплитудой $U_{ст}$. Покажем, что первая точка является неустойчивой. Пусть имеется небольшая начальная флуктуация DU . Ей будет соответствовать появление тока с амплитудой первой гармоники DI_1 . Этот ток создает в цепи обратной связи напряжение U^* , которое приведет к появлению тока I^* и т. д. Таким образом, малая начальная флуктуация DU приведет к установлению стационарной ненулевой амплитуды колебаний.

Для того, чтобы нулевая точка была неустойчивой, прямая обратной связи должна проходить в начале координат ниже графика колебательной характеристики:

$$\text{tg } \Theta = \left. \frac{dI_1}{dU} \right|_{U=0} = S_0;$$

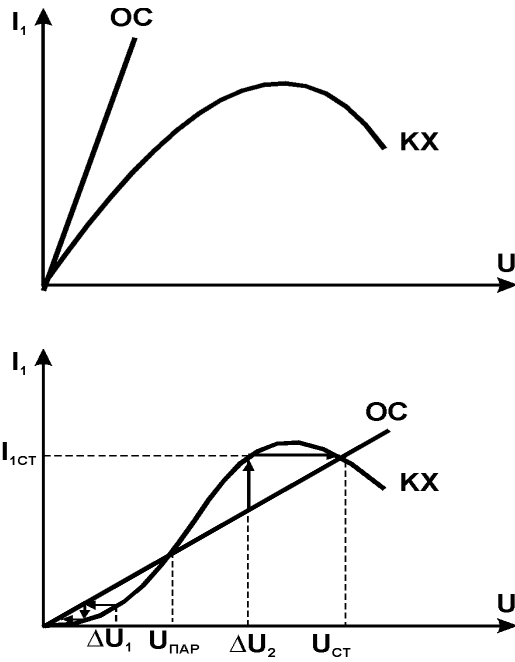
$$1/(Q \cdot M \cdot \omega_0) > S_0; \quad Q = \rho/R; \quad M \cdot S_0/C > R.$$

Это условие самовозбуждения было уже получено из анализа корней характеристического многочлена дифференциального уравнения цепи.

Рассмотренная цепь считается находящейся в мягком режиме самовозбуждения, когда колебания возникают при $\Delta U \rightarrow 0$. Очевидно (из построений), что точка $U_{ст}, I_{ст}$ является устойчивой, поскольку любые DU приводят к ее возврату в прежнее положение.

Расположение линии обратной связи по отношению к колебательной характеристике может быть и иным. В этом случае стационарный режим будет при нулевой амплитуде. В цепи не возникает автоколебаний при любых отклонениях DU .

Если график колебательной характеристики $I_1(U)$ имеет S -образную форму, то начальная точка будет устойчивой, однако цепь может самовозбудиться, если в ней возникнет начальная флуктуация $DU > U_{нар}$. Режим, когда начальная точка является устойчивой, но существует пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению, называется жестким режимом возбуждения генератора.



Таким образом, нелинейная цепь может вести себя по-разному при малых и сильных внешних воздействиях. Если по линеаризованному дифференциальному уравнению можно установить устойчивость или неустойчивость цепи “в малом”, то анализ колебательной характеристики совместно с прямой обратной связи позволяет провести анализ устойчивости “в большом” и определить возможность существования жесткого режима возбуждения.

Метод гармонической линеаризации пригоден для анализа цепей с узкополосными фильтрами - колебательными контурами с высокой добротностью. Если же фильтр не является таким контуром, то автоколебания

будут возникать не только на первой гармонике, но и на других ($w=nw_0$). При этом форма колебаний будет негармонической. Для анализа процессов в таких цепях используют метод уравнений состояния и их численное интегрирование.

Анализ автоколебаний методом уравнений состояния

Уравнение, полученное для автоколебательной цепи, эквивалентно системе уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} di_L(t)/dt &= V(t) \\ dV(t)/dt &= -\frac{R}{L}V(t) - \frac{1}{LC}i_L(t) + \frac{1}{LC}I(E_{CM} + M \cdot V(t)) \end{aligned} \right\}$$

Такое представление уравнений цепи соответствует уравнениям состояния.

В силу нелинейного характера функции $I(U)$, найти решение этого уравнения аналитически нельзя. Для анализа процессов применяют численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений - численное моделирование.

Простейший подход состоит в приближенной замене производной от функции $f(t)$:

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Обозначим: $t_n = n \cdot \Delta t$; $i_L(t_n) = i_{Ln}$; $V(t_n) = V_n$, получим

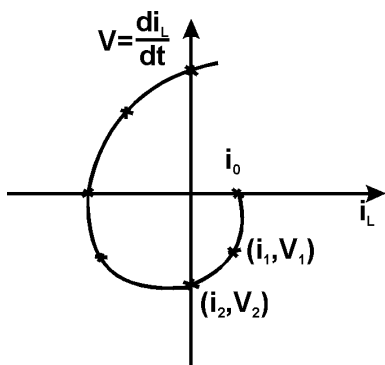
$$\begin{cases} i_{L(n+1)} = \Delta t \cdot V_n + i_{Ln} \\ V_{n+1} = \left(1 - \frac{R}{L}\right)V_n - \frac{\Delta t}{LC}i_{Ln} + \frac{\Delta t}{LC}I(E_{CM} + M \cdot V_n). \end{cases}$$

Предположим, что известна начальная флуктуация $i_L(0)=i_0$; $V(0)=0$. Поскольку функция $I(U)$ может быть вычислена для любых значений аргумента, подставляя в последнее уравнение, получаем

$$i_{L1} = 0 + i_0,$$

$$V_1 \approx \frac{\Delta t}{LC} i_0 + \frac{\Delta t}{LC} I(E_{CM}).$$

Теперь, подставив полученные значения снова в данное уравнение, найдем i_{L2} , V_2 и т. д. Этот метод приближенного решения носит название метода Эйлера.

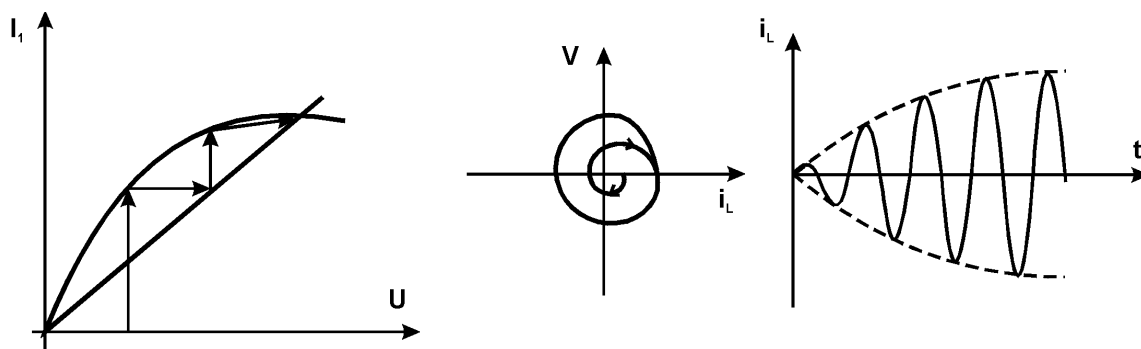


Решение системы уравнений может быть представлено графически на плоскости состояния.

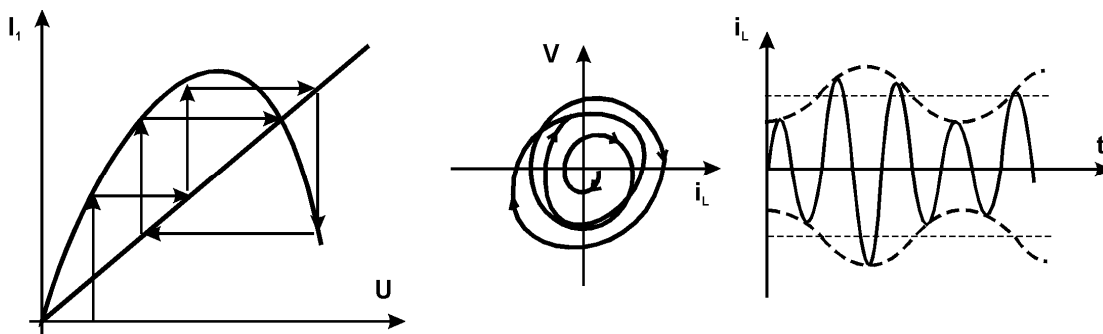
Рассмотрение процессов в автоколебательных цепях на плоскости состояния часто оказывается более наглядным, чем в другой форме.

Рассмотрим примеры, показывающие взаимосвязь характеристики и линии ОС с траекторией на плоскости состояния и осциллограммы процессов, полученных численным решением уравнений состояния.

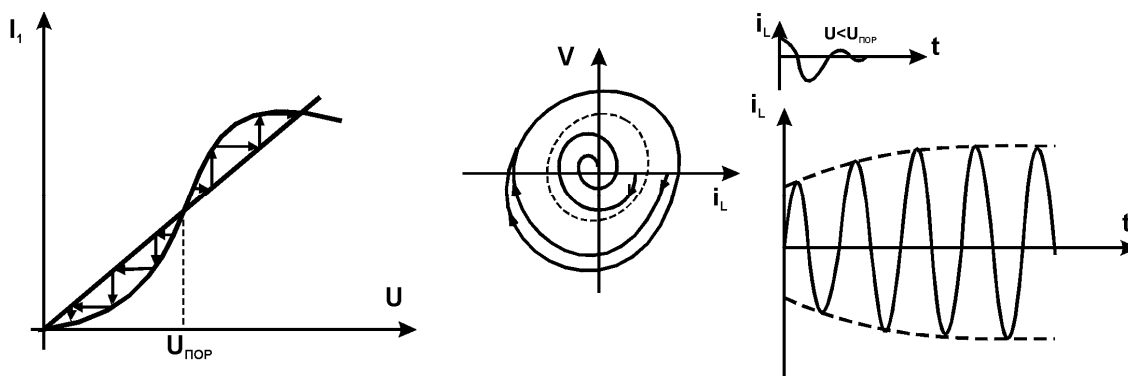
1. Автоколебательная цепь в мягком режиме самовозбуждения с монотонным установлением амплитуды.



2. Мягкий режим самовозбуждения с немонотонным установлением амплитуды.



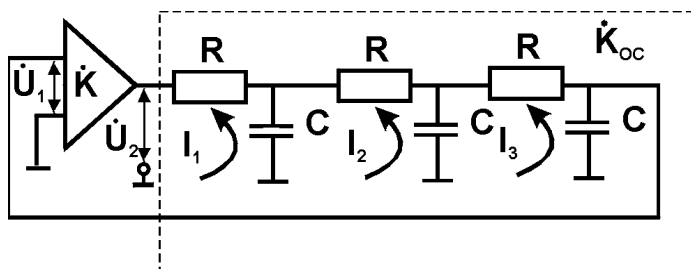
3. Жесткий режим с монотонным установлением колебаний.



RC - автогенераторы гармонических колебаний

Гармонические колебания можно получить в системах, не содержащих колебательного контура. Выделение колебания нужной частоты здесь основано на

том, что условия самовозбуждения в ряде случаев могут выполняться только на одной частоте.



Рассмотрим вариант такой системы, состоящий из усилителя с коэффициентом передачи K и цепи обратной связи с коэффициентом передачи β .

Чтобы воспользоваться формулами баланса амплитуд и баланса фаз, примем, что $K = Ke^{j\pi}$, и определим β . Для этого воспользуемся методом контурных токов, в соответствии с которым составим систему уравнений, связывающих

\dot{U}_1 и \dot{U}_2 ($\beta = \dot{U}_1 / \dot{U}_2$):

$$\begin{aligned} (R + 1/j\omega C)\dot{I}_1 - (1/j\omega C)\dot{I}_2 &= \dot{U}_2 \\ -(1/j\omega C)\dot{I}_1 + (R + 2/j\omega C)\dot{I}_2 - (1/j\omega C)\dot{I}_3 &= 0 \\ -(1/j\omega C)\dot{I}_2 + (R + 2/j\omega C)\dot{I}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно \dot{I}_3 , находим:

$$\dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_2 j\omega C}{[S(\omega RC)^2 - 1] + j[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]}.$$

Так как $\dot{U}_1 = \dot{I}_3 / j\omega C$, то

$$\dot{K}_{oc} = \frac{\dot{I}_3 / j\omega C}{\dot{U}_2} = \frac{-1}{[S(\omega RC)^2 - 1] + j[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]} =$$

$$= K_{oc} e^{j\varphi_k(\omega)}.$$

Так как фазовый сдвиг, вносимый усилителем, составляет π рад, то условие самовозбуждения будет выполнено, если

$$\varphi_{oc}(\omega) = \text{arctg}(\text{Im}\beta / \text{Re}\beta) = \pi.$$

Как следует из предыдущего выражения, последнее соотношение выполняется при условии

$$\omega \cdot R \cdot C [(\omega \cdot R \cdot C)^2 - 6] = 0.$$

Откуда для частоты генерации находим:

$$\omega_r = \sqrt{6} / RC.$$

Находим значение модуля передаточной функции:

$$\beta(\omega_r) = \frac{1}{5(\omega_r RC)^2 - 1} = \frac{1}{29}.$$

Теперь находим коэффициент усиления усилителя, при котором возможна генерация:

$$K \geq \frac{1}{\beta} = 29.$$

Аналогичным образом анализируются и другие схемы RC - автогенераторов.

9. Параметрические цепи

Общие понятия о параметрических цепях

Электрические системы, в которых хотя бы один из параметров (R , L или C) является переменным во времени, называются цепями с переменными параметрами, или параметрическими цепями. Если параметры зависят только от времени и не зависят от режима работы (т. е. от I или U), система является линейной.

С помощью параметрических систем, в которых переменным является активное сопротивление, могут осуществляться, например, такие преобразования сигналов: детектирование, выпрямление, амплитудная модуляция, преобразование частоты и др.

В цепях с переменными реактивными элементами, способными запасать и отдавать энергию, при определенных условиях могут происходить усиление и генерация колебаний. Это связано с появлением в системе отрицательного сопротивления, описывающего формально физический процесс внесения энергии в колебательную систему за счет работы сил, изменяющих параметр. Появление отрицательного сопротивления свидетельствует о наличии параметрической регенерации колебаний данной частоты. Под регенерацией понимается процесс частичного восполнения (восстановления) теряемой в системе энергии.

Математическое описание процессов, происходящих в параметрических цепях, сводится к линейным алгебраическим или дифференциальным уравнениям с

переменными (во времени) коэффициентами. В силу линейности цепей связь между входными и выходными сигналами в них определяется с помощью импульсной характеристики $g(t)$ (методом интеграла наложения) или с помощью комплексной передаточной функции $K(j\omega)$.

9.1. Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи

Для определения импульсной характеристики $g(t, \tau)$, где τ - время воздействия, t - время появления и действия отклика, непосредственно по заданным параметрам цепи необходимо использовать дифференциальное уравнение цепи.

Чтобы проанализировать методику нахождения $g(t, \tau)$, рассмотрим простую цепь, описываемую уравнением первого порядка:

$$a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)y(t) = f(t),$$

где $f(t)$ - воздействие, $y(t)$ - отклик.

По определению, импульсная характеристика является откликом цепи на одиночный дельта-импульс $\delta(t-\tau)$, подаваемый на вход в момент $t=\tau$. Из этого определения следует, что если в правой части уравнения положить $f(t) = \delta(t-\tau)$, то в левой части можно принять $y(t) = g(t, \tau)$.

Таким образом, приходим к уравнению

$$a_1(t) \frac{dg(t, \tau)}{dt} + a_0(t)g(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

Так как правая часть этого уравнения равна нулю всюду, кроме точки $t=\tau$, функцию $g(t)$ можно искать в виде решения однородного дифференциального уравнения:

$$a_1(t) \frac{dg(t, \tau)}{dt} + a_0(t)g(t, \tau) = 0$$

при начальных условиях, вытекающих из предыдущего уравнения, а также из условия, что к моменту приложения импульса $\delta(t-\tau)$ в цепи отсутствуют токи и напряжения.

В последнем уравнении переменные разделяются:

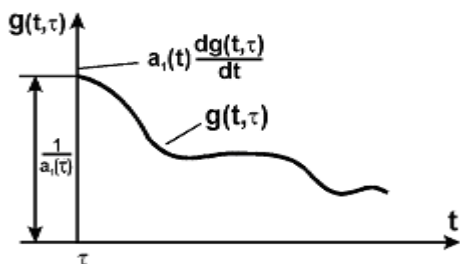
$$\frac{dg}{g} + \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt = \frac{dg}{g} + P(t)dt = 0.$$

Откуда

$$g(t, \tau) = g(t = \tau) e^{-\int P(t) dt},$$

где $g(t = \tau)$ - значения импульсной характеристики в момент воздействия.

Для определения начального значения $g(t = \tau)$ вернемся к исходному уравнению. Из него следует, что в точке $t = \tau$ функция $g(t)$ должна совершить скачок на величину $1/a_1(x)$, поскольку только при этом условии первое слагаемое в ис-



ходном уравнении $a_1(t)[dg/dt]$ может образовывать дельта-функцию $\delta(t-\tau)$.

Так как при $t < \tau$ $g(t, \tau) = 0$, то в момент $t = \tau$

$$g(t = \tau) = \frac{1}{a_1(\tau)}. \quad \text{Заменяя неопределенный интеграл}$$

определенным с переменным верхним пределом интегрирования, получаем соотношения для определения импульсной характеристики:

$$g(t, \tau) = g(t = \tau) \exp\left(-\int_{\tau}^t P(t) dt\right) = \frac{1}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt\right).$$

Зная импульсную характеристику, нетрудно определить передаточную функцию линейной параметрической цепи, поскольку обе оси связаны парой преобразования Фурье:

$$\dot{K}(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t, a) e^{-j\omega a} da,$$

где $a=t-\tau$ - задержка сигнала. Функция $g_1(t, a)$ получается из функции $g(t, \tau)$ заменой $\tau=t-a$.

Наряду с последним выражением, можно получить еще одно определение передаточной функции, в котором импульсная характеристика $g_1(t, a)$ не фигурирует. Для этого используем обратное преобразование Фурье для отклика $S_{\text{ВЫХ}}(t)$:

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{K}(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega.$$

Для случая, когда входной сигнал является гармоническим колебанием, $S(t) = \cos\omega_0 t$. Соответствующий $S(t)$ аналитический сигнал есть $Z(t) = e^{j\omega_0 t}$.

Спектральная плоскость этого сигнала $\dot{Z}(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

Подставляя $\dot{Z}(j\omega)$ вместо $\dot{S}(j\omega)$ в последнюю формулу, получаем

$$Z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \dot{K}(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega = \dot{K}(j\omega_0, t) e^{j\omega_0 t}.$$

Отсюда находим:

$$\dot{K}(j\omega_0, t) = Z_{\text{ВЫХ}}(t) / e^{j\omega_0 t}.$$

Здесь $Z_{\text{ВЫХ}}(t)$ - аналитический сигнал, соответствующий выходному сигналу $S_{\text{ВЫХ}}(t)$.

Таким образом, выходной сигнал при гармоническом воздействии

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} Z_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} \left[\dot{K}(j\omega_0, t) e^{j\omega_0 t} \right]$$

определяется так же, как и для любых других линейных цепей.

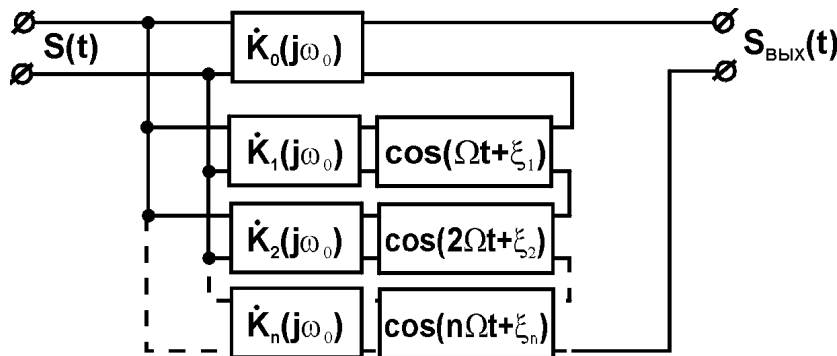
Если передаточная функция $\dot{K}(j\omega_0, t)$ изменяется во времени по периодическому закону с основной частотой Ω , то ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$\dot{K}(j\omega_0, t) = \dot{K}_0(j\omega_0) + \dot{K}_1(j\omega_0) \cos(\Omega t + \xi_1) + \dot{K}_2(j\omega_0) \cos(2\Omega t + \xi_2) + \dots,$$

где $\dot{K}_0(j\omega_0), \dot{K}_n(j\omega_0)$ - не зависящие от времени коэффициенты, в общем случае комплексные, которые можно трактовать как передаточные функции некоторых четырехполосников с постоянными параметрами.

Произведение $\dot{K}_n(j\omega_0)\cos(n\Omega t + \xi_n)$ можно рассматривать как передаточную функцию каскадного (последовательного) соединения двух четырехполюсников: одного с передаточной функцией $\dot{K}_n(j\omega_0)$, не зависящей от времени, и второго с передаточной функцией $\cos(n\Omega t + \xi_n)$, изменяющейся во времени, но не зависящей от частоты ω_0 входного сигнала.

Основываясь на последнем выражении, любую параметрическую цепь с периодически изменяющимися параметрами можно представить в виде следующей эквивалентной схемы:



Откуда понятен процесс образования новых частот в спектре выходного сигнала.

Аналитический сигнал на выходе будет равен

$$Z_{\text{ВЫХ}}(t) = \dot{K}(j\omega_0, t)e^{j\omega_0 t} = \dot{K}_0(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \dot{K}_1(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} \times \\ \times \cos(\Omega t + \xi_1) + \dot{K}_2(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} \cos(2\Omega t + \xi_2) + \dots = \dot{K}_0(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \\ + \dot{K}_1(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + \varphi_1)} \cos(\Omega t + \xi_1) + \dot{K}_2(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + \varphi_2)} \cos(2\Omega t + \xi_2) + \dots,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$ – фазовые характеристики четырехполюсников $\dot{K}_0(j\omega_0), \dot{K}_1(j\omega_0), \dot{K}_2(j\omega_0), \dots$.

Переходя к вещественному сигналу на выходе, получаем

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} Z_{\text{ВЫХ}}(t) = K_0(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + K_1(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \cos(\Omega t + \xi_1) + K_2(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \times \\ \times \cos(2\Omega t + \xi_2) + \dots = K_0(\omega) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\omega_0) \times \\ \times \{\cos[(\omega_0 \pm n\Omega)t + \varphi_n \pm \xi_n]\}.$$

Этот результат указывает на следующее свойство цепи с переменными параметрами: при изменении передаточной функции по любому сложному, но периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω_0 образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega, \omega_0 \pm 2\Omega$ и т. д.

Если на вход цепи подается сложный сигнал, то все сказанное выше относится к каждой из частот ω и к входному спектру. Разумеется, что в линейной пара-

метрической цепи никакого взаимодействия между отдельными компонентами входного спектра не существует (принцип суперпозиции) и на выходе цепи не возникает частот вида $n\omega_1 \pm m\omega_2$, где ω_1 и ω_2 - различные частоты входного сигнала.

Энергетика цепей с параметрическими реактивными элементами

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, содержащей конденсатор, емкость которого является функцией приложенного напряжения. Параметрические конденсаторы не являются элементами радиотехнических цепей в чистом виде. В качестве параметрических конденсаторов обычно применяются нелинейные конденсаторы. Модель параметрического конденсатора получается из модели нелинейного конденсатора путем замены $C(U)$ на $C(t)$. Рассмотрим, как это реализуется. Пусть на нелинейный конденсатор подано колебание высокой частоты $U_{HK}(t)$, амплитуда которого достаточна для того, чтобы вызвать заметную модуляцию емкости в соответствии с законом $C(U)$. Будем называть это модулирующее колебание колебанием накачки и будем считать, что оно гармоническое, т. е. $U_{HK}(t) = U_{mHK} \cos(\omega_{HK}t + \varphi_{HK})$. Найдем закон изменения емкости от времени, т. е. зависимость $C(t)$.

Вольт-кулоновую характеристику нелинейного конденсатора можно аппроксимировать степенным полиномом, причем приемлемая точность аппроксимации в большинстве случаев получается при полиномах второй степени. Поэтому запишем аппроксимирующий полином в виде $q = b_1 U_{HK} + b_2 U_{HK}^2$, так как $C(U) = q(U)/U$, то, сделав соответствующие подстановки, найдем:

$$C(t) = b_1 \left[1 + \frac{b_2}{b_1} U_{mHK} \cos(\omega_{HK}t + \varphi_{HK}) \right].$$

Коэффициент b_1 равен дифференциальной емкости C_0 в начальной рабочей точке, заданной напряжением смещения U_0 . Множитель перед косинусом имеет смысл коэффициента, характеризующего глубину изменения емкости: обозначим его $m_C = (b_2/b_1) U_{mHK} = \Delta C/C_0$. С учетом этих обозначений последнее соотношение представляет собой зависимость от времени емкости конденсатора, изменяющуюся во времени по гармоническому закону с частотой накачки

$$C(t) = C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{HK}t + \varphi_{HK})].$$

Это и есть модель параметрического конденсатора, полученная из модели нелинейного конденсатора путем замены зависимости $C(U)$ зависимостью $C(t)$.

Рассмотрим процесс в цепи, образованной источником сигнала $U_C(t) = U_{mC} \cos(\omega_C t + \varphi_C)$ и параметрическим конденсатором с емкостью $C(t)$. Будем считать, что амплитуда сигнала мала: $U_{mC} \ll U_{mHK}$. Поэтому для такого напряжения сигнала емкость C можно считать линейной, т. е. в вольт-кулоновой характеристике можно ограничиться только первым слагаемым.

Найдем ток, протекающий через конденсатор:

$$i(t) = \frac{dq(U)}{dt} = \frac{d[C(U_{\text{HK}})U_C]}{dt} = C(U_{\text{HK}}) \frac{dU_C}{dt} + U_C \frac{dC(U_{\text{HK}})}{dt}.$$

Подставив в это выражение соответствующие величины, после преобразования получим

$$i(t) = -\omega_C C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{\text{HK}} t + \varphi_{\text{HK}})] U_{mC} \sin(\omega_C t + \varphi_C) - \omega_{\text{HK}} C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{\text{HK}} t + \varphi_{\text{HK}})] U_{mC} m_C \sin(\omega_C t + \varphi_C).$$

Преобразуя произведения $\sin\alpha\cos\beta$ по известным тригонометрическим формулам, получаем

$$i(t) = -\omega_C C_0 U_{mC} \sin(\omega_C t + \varphi_C) + \frac{m_C C_0 U_{mC}}{2} (\omega_C - \omega_{\text{HK}}) \times \\ \times \sin[(\omega_{\text{HK}} - \omega_C)t + \varphi_{\text{HK}} - \varphi_C] - \frac{m_C C_0 U_{mC}}{2} (\omega_C + \omega_{\text{HK}}) \times \\ \times \sin[(\omega_{\text{HK}} + \omega_C)t + \varphi_{\text{HK}} + \varphi_C].$$

Как видно, в спектре тока, протекающего через параметрический конденсатор, помимо составляющей на частоте сигнала ω_C содержатся гармоники разностной ($\omega_{\text{HK}} - \omega_C$) и суммарной ($\omega_{\text{HK}} + \omega_C$) частот. Рассмотрим процесс преобразования энергии в этой цепи.

Средняя мощность в рассматриваемой цепи равна мгновенной мощности, усредненной за период сигнала:

$$P_{CP} = \frac{1}{T_C} \int_0^{T_C} U_C(t) i(t) dt = f_C E_C,$$

где $E_C = \int_0^{T_C} U_C(t) i(t) dt$ - энергия сигнала, $f_C = \frac{\omega_C}{2\pi}$.

Прямое интегрирование этого выражения достаточно громоздко. Поэтому выделим вначале такую составляющую тока, которая дает среднюю мощность, отличную от нуля, а затем вычислим и среднюю мощность.

Гармоника тока на частоте сигнала является обычной реактивной составляющей тока, протекающего через конденсатор. Она находится в квадратуре с напряжением сигнала ($\vec{U}_C \perp \vec{i}_{\omega_C}$) и не создает средней мощности. Гармоника тока суммарной частоты тоже не дает $P_{CP} \neq 0$ на частоте ω_C , так как нет самого колебания. И только гармоника разностной частоты и при одном только условии: $\omega_{\text{HK}} = 2\omega_C$ может создать полную мощность на частоте сигнала. Обозначим ее P_{Ccp} и найдем:

$$P_{Ccp} = \frac{1}{T_C} \int U_{mC}^2 \frac{\omega_{\text{HK}} C_0 m_C}{2} \sin(\omega_C t + \varphi_{\text{HK}} - \varphi_C) \cos \omega_C t dt = \\ = \frac{m_C \omega_C C_0 U_{mC}^2}{4} \sin(2\varphi_C - \varphi_{\text{HK}}).$$

Как следует из этого уравнения, средняя мощность в цепи может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от соотношения фазовых углов напряжений сигнала и накачки. При положительной мощности цепь потреб-

ляет от источника сигнала мощность, которая рассеивается в конденсаторе. Отрицательную мощность трактуют как мощность, поступающую в цепь от источника накачки, которая может не только скомпенсировать потери на частотах сигнала, но и привести к росту мощности сигнала на выходе цепи.

Таким образом, параметрический конденсатор может выполнять функцию активного элемента - усилителя мощности. Из этого уравнения также следует, что по аналогии с обычным резистором, потребляющим активную мощность, параметрический конденсатор может быть заменен отрицательным сопротивлением, вносимым в цепь. Его значение можно найти из условия $P_{C\ CP} = U_{mC}^2 / (2R_{BH})$. Сравнивая последнее соотношение с предыдущим, находим, что

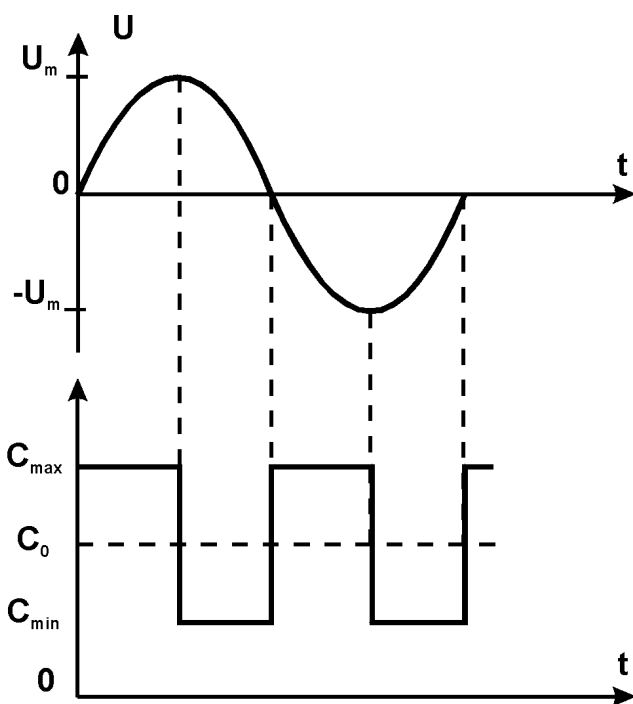
$R_{BH} = [m_C \omega_C C_0 \sin(2\varphi_C - \varphi_{HK})]^{-1}$ и зависит только от фазовых соотношений между напряжениями сигнала и накачки.

Полученный эффект, связанный с перекачкой энергии от источника U_{HK} в сигнал, достаточно неожидан, и поэтому рассмотрим физику явления.

9.2. Параметрический резонанс

Существуют явления, при которых так же, как и при действии гармонического сигнала на колебательный контур, результат внешнего воздействия называется зависимым от частоты этого воздействия. Эти явления объединяют понятием резонанс в более широком смысле, и применительно к колебательным цепям, содержащим параметрический конденсатор, говорят о параметрическом резонансе.

Рассмотрим в качестве примера явления, происходящие в колебательном контуре с параметрическим конденсатором при воздействии на конденсатор на-



пряжения накачки в виде прямоугольных импульсов с частотой следования, равной удвоенной частоте собственных колебаний контура. Допустим, что между частотой собственных колебаний и изменением емкости C существует жесткая синхронизация: в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает экстремума, емкость скачком уменьшается; в моменты времени, когда напряжение становится равным нулю, емкость скачком увеличивается на ту же величину.

Энергия, запасенная конденсатором, равна $E = q^2 / 2C$. При малом приращении емкости $\Delta C \ll C_0$ при-

ращение энергии

$$\Delta E \approx -\frac{q^2}{2C_0^2} \Delta C = -E_{\max} \frac{\Delta C}{C_0}$$

(линейно зависит от приращения емкости).

Максимальная энергия, запасенная параметрическим конденсатором, равна

$$E_{\max} = \frac{1}{2} U_m^2 C_{\max} = \frac{1}{2} U_m^2 \left(C_0 + \frac{\Delta C}{2} \right) \approx \frac{1}{2} U_m^2 C_0.$$

Из графиков и формулы следует, что за период собственных колебаний контур дважды получает дополнительную энергию от источника накачки в моменты экстремальных значений напряжения на конденсаторе. Обозначим эту дополнительную энергию накачки E_{HK} и в соответствии с формулой запишем:

$$E_{HK} = 2\Delta E = 2E_{\max} \frac{\Delta C}{C_0} \approx U_m^2 \Delta C.$$

Как известно, эквивалентное сопротивление контура при резонансе активно и для параллельного контура равно $R_{\text{ЭKB}} = \rho Q$, где Q - добротность, а $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление контура. Энергия, рассматриваемая в контуре за период собственных колебаний, равна

$$E_{PACC} = T \frac{U_m^2}{2R_{\text{Эже}}} = \frac{U_m^2 T}{2\rho Q}.$$

Сравнивая рассеиваемую энергию с накачиваемой в контур, можно заключить, что в контуре колебания либо не возникают, либо они нарастают неограниченно. Первое происходит, если $E_{PACC} > E_{HK}$; второе - если $E_{PACC} < E_{HK}$. Другими словами, колебания нарастают, если коэффициент модуляции емкости больше некоторого критического значения. Из последних выражений также следует, что для возникновения параметрического резонанса необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta C / C_0 \geq T / (2\rho Q C_0).$$

Подставив сюда $\rho = \sqrt{L/C_0}$ и $T = 2\pi\sqrt{LC_0}$, получим

$$\Delta C / C_0 \geq \pi Q.$$

Оно и определяет критическое значение ΔC .

Поясним полученный результат. Каждый раз, когда емкость уменьшается, конденсатор заряжен и энергия источника накачки затрачивается на увеличение электрической энергии контура. Каждый раз, когда емкость увеличивается, конденсатор разряжен и изменение емкости происходит без затрат полезной энергии.

Таким образом, в цепях с реактивными параметрическими элементами энергия накачки может преобразовываться в энергию сигнала.

Баланс мощностей в параметрических цепях

Рассматриваемая модель параметрической цепи реально представляет собой нелинейную цепь. А в цепи, содержащей нелинейный конденсатор, под воздейст-

вием напряжения генератора накачки и напряжения генератора сигнала возникают колебания комбинационных частот: $\omega_K = m\omega_C + n\omega_{HK}$.

Чтобы представить себе, как перераспределяются энергии информационного сигнала и сигнала накачки между комбинационным колебанием, рассмотрим следующую цепь.

Пусть параллельно нелинейному конденсатору включены три цепи - цепь накачки, цепь сигнала и колебательный контур. Последний называют холостым контуром. Контур настроен на одну из комбинационных частот ω_K , и поэтому можно принять, что других комбинационных колебаний не существует. Сумма средних мощностей колебаний сигнала P_C , накачки P_{HK} и комбинационной частоты P_K должна быть равна нулю (закон сохранения энергии):

$$P_C + P_{HK} + P_K = 0.$$

Переходя от средних мощностей к энергиям, получим $\omega_C E_C + \omega_{HK} E_{HK} + \omega_K E_K = 0$. Подставляя сюда $\omega_K = m\omega_C + n\omega_{HK}$, находим, что

$$\omega_C (E_C + mE_K) + \omega_{HK} (E_{HK} + nE_K) = 0.$$

Последнее равенство при произвольных ω_C и ω_{HK} выполняется, если каждое слагаемое равно нулю (поскольку они не связаны общей частотой):

$$E_C + mE_K = 0,$$

$$E_{HK} + nE_K = 0.$$

Переходя от энергии к средним мощностям, получаем

$$\left. \begin{aligned} P_C / \omega_C + mP_K / (m\omega_C + n\omega_{HK}) &= 0 \\ P_{HK} / \omega_{HK} + nP_K / (m\omega_C + n\omega_{HK}) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Уравнения выражают закон сохранения энергии в параметрических цепях. Их называют уравнениями Мэнли-Роу. И они являются частным случаем общей теоремы Мэнли-Роу о балансе мощностей в спектре колебания параметрической цепи, содержащей реактивную нелинейность (емкость или индуктивность). Теорема записывается в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m \cdot P_{mn}}{m\omega_C + n\omega_{HK}} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m \cdot P_{mn}}{m\omega_C + n\omega_{HK}} = 0.$$

Они определяют законы распределения энергии сигнала накачки между гармониками выходного сигнала

Здесь P_{mn} - средняя мощность колебания на комбинационной частоте $m\omega_1 + n\omega_0$.

Запишем уравнения Мэнли-Роу для частного вида цепи, в которой существуют колебания только на четырех частотах:

$$\omega_C, \omega_{HK}, \omega_+ = \omega_{HK} + \omega_C, \omega_- = \omega_{HK} - \omega_C.$$

Для этого необходимо задать две пары значений - m и n : $m=1, n=1$ и $m=-1, n=1$.

$n=1$.

Тогда

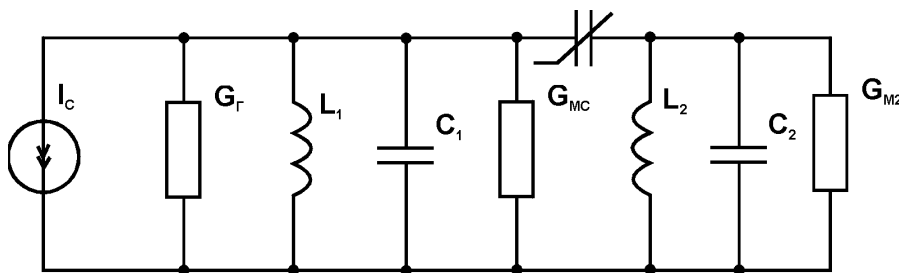
$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{HK}}{\omega_{HK}} + \frac{P_+}{\omega_+} + \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \\ \frac{P_C}{\omega_C} + \frac{P_+}{\omega_+} - \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Эти формулы и устанавливают количественные соотношения (баланс) между мощностями колебаний различных частот.

Параметрические усилители

На основании принципа параметрического резонанса строятся параметрические усилители. Различают три наиболее важных режима усиления: 1) с преобразованием частоты “вверх”; 2) с преобразованием частоты “вниз”; 3) регенеративный вырожденный режим.

Первые два режима реализованы в двухканальном усилителе, схема которого приведена на рисунке.



Усилитель содержит два контура: сигнальный (L_1C_1), настроенный на частоту ω_c , и выходной (L_2C_2), настроенный на одну из комбинационных частот (ω_+ или ω_-). Режим с преобразованием частоты “вверх” или “вниз” определяется частотой настройки выходного контура. На этом рисунке также обозначены: G_{HC} - проводимость нагрузки сигнального контура, G_{H2} - проводимость нагрузки холодного контура.

В усилителе с преобразованием частоты “вверх” выходной контур настраивается на суммарную частоту $\omega_+ = \omega_{HK} + \omega_C$, и предыдущее соотношение принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{HK}}{\omega_{HK}} + \frac{P_+}{\omega_+} &= 0 \\ \frac{P_C}{\omega_C} + \frac{P_+}{\omega_+} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Так как всегда $P_+ > 0$ (P_+ - мощность, выделяемая в нагрузке), то из уравнений следует $P_{HK} < 0$ и $P_C < 0$. Это означает, что оба генератора (и сигнала, и накачки) от-

дают мощность в выходной контур. Из второго уравнения вытекает, что максимально возможный коэффициент усиления в рассматриваемом режиме равен $K_p = -P_+ / P_C = \omega_+ / \omega_C$.

Усилители такого типа имеют ограниченное применение, поскольку на высоких частотах (там, где и используются параметрические усилители) трудно обеспечить большое значение отношения ω_+ / ω_C . Достоинством такого режима усиления является высокая устойчивость работы усилителя.

В усилителе с преобразованием частоты “вниз” выходной контур подстраивается на резонансную частоту $\omega_- = \omega_{HK} - \omega_C$, и уравнение принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_C}{\omega_C} - \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \\ \frac{P_{HK}}{\omega_{HK}} - \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Как видно из первого равенства, мощности P_C и P_- - положительные, поскольку мощность, потребляемая нагрузкой - $P > 0$. Это означает, что часть мощности генератора накачки поступает в сигнальный контур и компенсирует часть теряемой в ней мощности, т. е. в усилителе происходит регенерация на частоте сигнала. Из этих уравнений нельзя получить коэффициент усиления, поскольку P_C включает не только мощность, потребляемую нагрузкой, но и часть мощности, возникающей за счет регенерации. Тем не менее, записав первое уравнение в виде $P_- = P_C \omega_- / \omega_C$, можно утверждать, что усиление будет тем больше, чем больше отношение ω_- / ω_C .

Усилители данного типа неустойчивы в работе, так как в сигнальный контур поступает мощность даже в отсутствие сигнала, что при определенных условиях может привести к самовозбуждению.

Одиночный регенеративный усилитель является частным случаем усилителя с преобразованием частоты “вниз”.

В этом усилителе частота накачки равна удвоенной частоте сигнала $\omega_{HK} = 2\omega_C$, а разностная частота - частоте сигнала $\omega_- = \omega_C$, поэтому отпадает необходимость в отдельном контуре, настроенном на разностную частоту. Двухконтурная схема “вырождается” в одноконтурную, откуда происходит название “вырожденный” режим. Если условие $\omega_{HK} = 2\omega_C$ выполняется строго, в контуре выделяется одно усиленное колебание, по амплитуде равное сумме колебаний на частоте сигнала и разностной частоте. Такой режим работы называется синхронным. Как было показано, он зависит от фазовых соотношений колебаний накачки и сигнала.

В реальных условиях невозможно точно выполнить условие синхронизации. Поэтому одноконтурный регенеративный усилитель всегда работает в асинхронном режиме, когда $\omega_- - \omega_C = \delta\omega \neq 0$. При этом величина $2\varphi_{HK} - \varphi_C$ становится функцией времени, поскольку получает случайную добавку $\delta\omega t$. Вносимое сопротив-

ление также становится случайной функцией времени, и как следствие возникают случайные изменения усиления. Это является серьезным недостатком одноконтурных усилителей.

Параметрические усилители применяются в диапазоне частот от сотен МГц до десятков ГГц. Они имеют относительно узкую полосу пропускания 1...3 % и за счет этого, а также из-за отсутствия дробового эффекта, присущего активным элементам, - низкий уровень шумов.

10. Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи

10.1. Преобразование нормального процесса в безынерционных нелинейных цепях

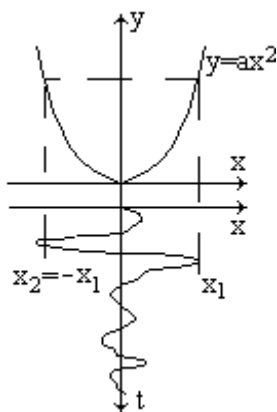
В нелинейных безынерционных элементах основная трудность состоит в нахождении корреляционной функции. Поэтому общих методов анализа преобразования случайных процессов в нелинейных устройствах не существует. Приходится ограничиваться частными задачами, поддающимися решению.

Пусть на нелинейный элемент действует случайное колебание с заданной плотностью вероятности $p(x)$. Требуется найти плотность вероятности выходной величины $y - p(y)$. Связь между x и y определяется нелинейной зависимостью $y=f(x)$. Для безынерционного элемента очевидно соотношение $p(y)dy = p(x)dx$, откуда вытекает $p(y) = \frac{p(x)}{dy/dx}$.

Если обратная функция $x=\varphi(y)$ неоднозначна, то

$$p(y) = \left[\frac{p(x)}{dy/dx} \right]_{x=x_1} + \left[\frac{p(x)}{dy/dx} \right]_{x=x_2} + \dots$$

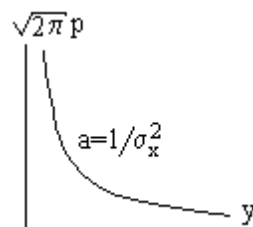
Нахождение $p(y)$ проще пояснить на конкретных примерах.



Воздействие гауссовского процесса на элемент с симметричной квадратичной характеристикой

Полагая $y=ax^2$, $dy/dx=2ax$ и учитывая, что каждому значению y соответствует 2 значения $x (\pm\sqrt{y/a})$, найдем:

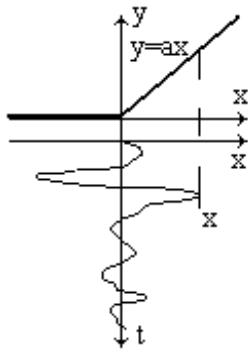
$$p(y) = \begin{cases} \frac{p(+\sqrt{y/a})}{2a\sqrt{y/a}} + \frac{p(-\sqrt{y/a})}{2a\sqrt{y/a}} & \text{при } y \geq 0 \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$



Подставляя данные в выражение, получим

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}\sqrt{a}} e^{-\frac{y}{2a}\sigma_x^2} & \text{при } y \geq 0 \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

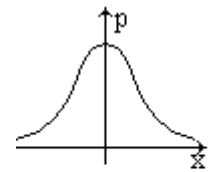
Воздействие нормально распределенного процесса на однополупериодный детектор с линейно ломаной характеристикой



В данном случае $y = \begin{cases} ax & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Плотность распределения вероятности в этом случае:

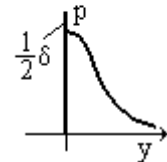
$$p(y) = \frac{p(x = y/a)}{a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}} & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$



Плотность вероятности $p(y=0)=\infty$, так как $y=0$ при x меньше 0. Это можно учесть, записав

следующее выражение для $p(y)$:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}} & \text{при } y \geq 0 \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

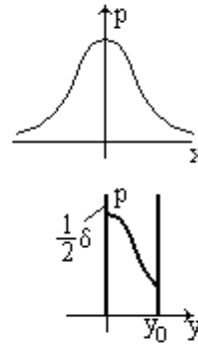
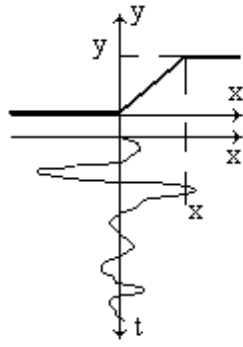


Первое слагаемое будет всюду равно 0, кроме точки $y=0$, где оно обращается в бесконечность. При интегрировании же по y это слагаемое дает 1/2.

Воздействие нормально распределенного процесса на ограничитель

По аналогии с предыдущим случаем составим выражение

$$p(y) = \frac{p(x = y/a)}{a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}} + P(x > x_0)\delta(y-y_0) & \text{при } y_0 \geq y \geq 0 \\ 0 & \text{при } y < 0 \text{ и } y > y_0. \end{cases}$$



Преобразование спектра случайного процесса в безынерционном нелинейном элементе

Непосредственно по формулам определить спектр на выходе по известному спектру на входе невозможно, нужно сначала найти корреляционную функцию на выходе и применить обратное преобразование Фурье.

Если на выходе есть нелинейная функция, то можно найти ее ковариационную функцию:

$K_y(\tau) = M[y(t)y(t+\tau)] = M[f(x_1)f(x_2)]$. Если известна двумерная плотность вероятности входного процесса, то $K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)P(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

Этот интеграл довольно трудно вычислять, поэтому прибегают к различным упрощениям.

Пример. Пусть $y=ax^2$. Двумерная плотность вероятности процесса $x(t)$ равна

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r_x^2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2r_x x_1 x_2}{2\sigma_x^2(1-r_x^2)}}, \text{ где } r_x=r_x(\tau) \text{ – нормированная корреляционная}$$

функция входного процесса.

Проделав необходимые преобразования и используя соотношение $r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$, перейдем к выражению $K_y(\tau) = a^2\sigma_x^4 + 2a^2\sigma_x^4 r_x^2(\tau) = a^2\sigma_x^4 + 2a^2 R_x^2(\tau)$.

Пусть $x(t)$ - узкополосный процесс, тогда, учитывая, что

$$R_x^2(\tau) = \sigma_x^4 r_0^2(\tau) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau \right), \text{ где } r_0 \text{ – огибающая корреляционной функции узкопо-}$$

лосного процесса, запишем окончательное выражение:

$$K_y(\tau) = a^2\sigma_x^4 + a^2\sigma_x^4 r_0^2(\tau) + a^2\sigma_x^4 r_0^2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau.$$

Применим теперь прямое преобразование Фурье и получим выражение для энергетического спектра процесса на выходе элемента:

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = a^2\sigma_x^4 2\pi\delta(\omega) + a^2\sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + a^2\sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Первое слагаемое (дискретное) соответствует постоянной составляющей выходного колебания, второе – низкочастотной составляющей, спектр которой примы-

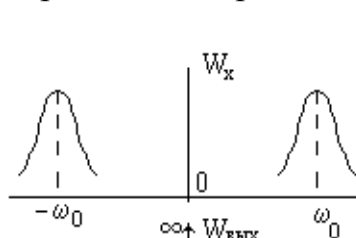
кает к нулевой частоте, третье – высокочастотной составляющей со спектром, группирующимся вблизи частоты $2\omega_0$.

ВЫВОД. Спектр на выходе существенно отличается от спектра на входе и имеет 3 составляющие.

Воздействие узкополосного шума на амплитудный детектор

Амплитудный детектор, содержащий диод и фильтр нижних частот (RC-цепь), представляет собой сочетание безынерционного нелинейного элемента с инерционной линейной цепью.

Линейное детектирование. Детектирование высокочастотного колебания с большой амплитудой. Считаем, что напряжение на выходе детектора воспроизводит амплитуду колебания на входе, т. е. считать, что коэффициент передачи детектора равен 1. Таким образом, напряжение шума на выходе линейного детектора обладает релеевским распределением:



$$p(u_{\text{ВЫХ}}) = p(A) = \frac{u_{\text{ВЫХ}}}{\sigma_x^2} e^{-\frac{u_{\text{ВЫХ}}^2}{2\sigma_x^2}} \text{ при } 0 < u_{\text{ВЫХ}} < \infty.$$

Среднее значение шумового напряжения

$$U_0 = [u_{\text{ВЫХ}}] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x = 1,26\sigma_x.$$

Дисперсия $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = [2 - \frac{\pi}{2}] \sigma_x^2 = 0,43\sigma_x^2.$

Найдем корреляционную функцию и энергетический спектр выходного сигнала при условии, что на входе линейного детектора действует нормальный шум, энергетический спектр которого $W_x(\omega) = N_0 [e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2}]$, а корреляционная функция

$$R_x(\tau) = N_0 \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} e^{j\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2} e^{j\omega\tau} d\omega \right] =$$

$$= \frac{N_0}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\tau^2/4\alpha \cos^2 \omega_0 \tau} = \sigma_x^2 e^{-\tau^2/4\alpha \cos^2 \omega_0 \tau}.$$

Окончательно получим

$$W_{\text{ВЫХ}}(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2} \left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2/4\alpha} e^{-\Omega\tau} d\tau \right] = \frac{\pi\sigma_x^4}{2} \left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4} e^{-\alpha\Omega^2/2} \right].$$

ВЫВОД. Ширина выходного спектра в $\sqrt{2}$ раз больше ширины входного спектра. Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания, независимо от особенностей структуры его спектра, т. е. огибающая каждой реализации шума на выходе детектора обладает спектром более широким,

чем частотная полоса самой реализации.

Квадратичный детектор. Напряжение на выходе детектора можно представить в виде $u_{\text{вых}}(t) = K \frac{A^2(t)}{2}$, где K – коэффициент пропорциональности.

Используя выражение $p(y) = \frac{p(x)}{dy/dx}$, получим закон распределения шумового напряжения на выходе квадратичного детектора:

$p(u_{\text{вых}}) = p\left(K \frac{A^2}{2}\right) = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-A^2/2\sigma_x^2} \frac{1}{KA} = \frac{1}{K\sigma_x^2} e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}$, т. е. напряжение на выходе квадратичного детектора имеет экспоненциальное распределение.

Математическое ожидание выходного напряжения: $M[u_{\text{вых}}] = K\sigma_x^2$, средний квадрат напряжения: $M[u_{\text{вых}}^2] = 2K^2\sigma_x^4$. Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе квадратичного детектора: $\sigma_{\text{вых}}^2 = M[u_{\text{вых}}^2] - M^2[u_{\text{вых}}] = 2K^2\sigma_x^4 - K^2\sigma_x^4 = K^2\sigma_x^4$.

Найдем корреляционную функцию сигнала на выходе:

$K_y(\tau) = a^2\sigma_x^4 + a^2\sigma_x^4 r_0^2(\tau)$, где $r_0(\tau) = e^{-\tau^2/4\alpha}$. Энергетический спектр сигнала:

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = a^2\sigma_x^4 \left[2\pi\delta(\Omega) + \int_0^\infty e^{-\tau^2/2\alpha} e^{-j\Omega\tau} d\tau \right] = a^2\sigma_x^4 \left[2\pi\delta(\Omega) + \sqrt{2\pi\alpha} e^{-\alpha\Omega^2/2} \right].$$

ВЫВОД. Спектры на выходах квадратичного и линейного детекторов одинаковы по форме, отличаются только масштабом оси ординат. Сам сигнал на выходе отличается от сигнала на входе. Это говорит о том, что они воспроизводят спектр огибающей, т. е. то, что необходимо получить.

10.2. Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный и частотный детекторы

Любой сигнал можно преобразовать в гармонический (по теореме Фурье). Поэтому будем рассматривать только гармонический сигнал.

При наложении узкополосного шума на сигнал суммарное колебание можно записать в форме $u(t) = s(t) + x(t) = E \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$. Разложим этот процесс на квадратурные составляющие:

$$u(t) = [E + A(t) \cos \theta] \cos \omega_0 t - A(t) \sin \theta \cos \omega_0 t = U(t) \cos[\omega_0 t + \xi(t)],$$

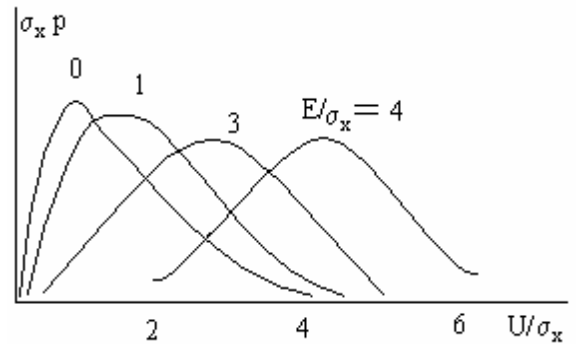
где $U(t) = \sqrt{E^2 + A^2(t) + 2EA(t) \cos \theta(t)}$ — амплитуда, $\xi(t) = \arctg \frac{A(t) \sin \theta(t)}{E + A \cos \theta(t)}$ — фаза.

Будем рассматривать только амплитуду, так как имеет место амплитудный детектор.

Плотность вероятности огибающей $p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2+A^2}{2\sigma_x^2}} I_0\left(\frac{A}{\sigma_x} \frac{U}{\sigma_x}\right)$, где I_0 – бесселева функция нулевого порядка от комплексного аргумента. Это есть *обобщенное*

распределение Релея.

Вид распределения при различных значениях E/σ_x . При $E/\sigma_x=0$ выражение принимает вид релейского распределения, при $E \gg \sigma_x$ получим распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием, равным E , и дисперсией σ_x^2 .



Линейный детектор. Пусть напряжение на выходе детектора совпадает с огибающей амплитуды высокочастотного напряжения на входе. Тогда математическое ожидание равно

$$U_0 = M[U] = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-E^2/2\sigma_x^2} \int_0^\infty U^2 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x} \frac{U}{\sigma_x}\right) dU, \text{ а средний квадрат напряжения}$$

$$M[U^2] = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-E^2/2\sigma_x^2} \int_0^\infty U^3 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x} \frac{U}{\sigma_x}\right) dU.$$

После вычисления интегралов получим следующие выражения:

$$M[U^2] = 2\sigma_x^2 + E^2$$

$$U_0 = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ I_0 \frac{h^2}{2} + h^2 \left[I_0 \frac{h^2}{2} + I_1 \frac{h^2}{2} \right] \right\} e^{-\frac{h^2}{2}}, \text{ где } h^2 = \frac{E^2/2}{\sigma_x^2} \text{ — отношение сигнал/шум на}$$

входе (отношение мощности полезного сигнала к мощности паразитного сигнала).

$$\text{Дисперсия сигнала на выходе } \sigma_{\text{вых}}^2 = M[U^2] - M^2[U] = 2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2.$$

В отсутствие полезного сигнала математическое ожидание шума распределено по Релею ($U_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x$). Если есть полезный сигнал на входе, то для получения полезного сигнала на выходе необходимо вычесть шумовую составляющую

($U_0 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x$). Следовательно, отношение сигнал/шум на выходе будет

$$\frac{(U_0 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x)^2}{2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2}.$$

Рассмотрим два предельных случая:

1. $h^2 \ll 1$ — слабый сигнал. В этом случае вводятся упрощения:

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx 1, I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{h^2}{4}, e^{-h^2/2} \approx 1 - \frac{h^2}{2}. \text{ Отсюда выражение для } U_0 \text{ можно записать в}$$

$$\text{укороченном виде: } U_0 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{h^2}{2}\right).$$

Дисперсия:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - \frac{\pi}{2} \sigma_x^2 \left(1 + \frac{h^2}{2}\right)^2 = 2\sigma_x^2 \left(1 + \frac{E^2/2}{\sigma_x^2}\right) - \frac{\pi}{2} \sigma_x^2 \left(1 + \frac{h^2}{2}\right)^2 = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

При слабом сигнале отношение сигнал/шум на выходе:

$$\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{\pi/2 \sigma_x^2 h^4 / 4}{\sigma_x^2 (2 - \pi/2)} = \frac{\pi}{8} \frac{h^4}{(2 - \pi/2)} = \left(\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВХ}} \right)^2$$

ВЫВОД. Слабый сигнал в линейном детекторе подавляется помехой.

2. $h^2 \gg 1$ — сильный сигнал. Проведем аналогичный анализ:

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2} \left(1 + \frac{1}{4h^2}\right)}{h\sqrt{\pi}}, \quad I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2} \left(1 - \frac{3}{4h^2}\right)}{h\sqrt{\pi}}.$$

U_0 в этом случае принимает вид $U_0 \approx \sqrt{2} \sigma_x h \left(1 + \frac{1}{4h^2}\right) \approx E \left(1 + \frac{1}{4h^2}\right) \approx E$, но

$$U_0^2 \approx E^2 \left(1 + \frac{1}{4h^2}\right)^2 \approx E^2 + \sigma_x^2.$$

Отсюда дисперсия сигнала на выходе

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - E^2 - \sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

Найдем соотношение сигнал/шум на выходе: $\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_0^2}{\sigma_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{E^2}{\sigma_x^2} = 2h^2 = 2 \left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВХ}}.$

ВЫВОД. При сильном сигнале помеха подавляется сигналом.

Квадратичный детектор. Проведем аналогичные рассуждения.

Напряжение на выходе квадратичного детектора $u_{\text{ВЫХ}}(t) = K \left[\frac{E^2}{2} + \frac{A^2(t)}{2} + EA(t) \cos \theta(t) \right].$

Учитывая, что $\overline{A^2(t)} = 2\sigma_x^2$, $\overline{A^4(t)} = 8\sigma_x^4$ и $\overline{A(t) \cos \theta(t)} = 0$ (так как $\overline{\cos \theta(t)} = 0$), а так же $\overline{x(t)} = \overline{A(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t))} = 0$, получим среднее значение напряжения по времени на

выходе: $\overline{u_{\text{ВЫХ}}(t)} = K \left[\frac{E^2}{2} + \sigma_x^2 \right] = U_{\text{ОС}} + U_{\text{ОП}}$, где K — характеристика детектора, E — амплитуда немодулированного гармонического сигнала.

$U_{\text{ОС}}$ — слагаемое, обусловленное помехой, $U_{\text{ОП}}$ — слагаемое, обусловленное сигналом.

Найдем $u_{\text{ВЫХ}}^2(t)$ из исходного соотношения:

$$u_{\text{ВЫХ}}^2(t) = K^2 \left[\frac{E^2}{2} + \frac{A^2(t)}{2} + EA(t) \cos \theta(t) \right]^2 = K^2 \left[\frac{E^4}{4} + \frac{A^4(t)}{4} + E^2 A^2(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta(t) \right) + \frac{E^2 A^2(t)}{2} + E^3 A(t) \cos \theta(t) + A^3(t) E \cos \theta(t) \right].$$

При усреднении по времени все слагаемые с $\cos \theta(t)$ и $\cos 2\theta(t)$ обращаются в ноль.

Следовательно, $u_{\text{ВЫХ}}^2(t) = K^2 \left[\frac{E^4}{4} + \frac{\overline{A^4(t)}}{4} + E^2 \overline{A^2(t)} \right] = K^2 \left[\frac{E^2}{4} + 2\sigma_x^4 + 2E^2 \sigma_x^2 \right].$

Вычитая из этого выражения $(\overline{u_{\text{ВЫХ}}})^2$, найдем дисперсию шума на выходе квадратичного детектора:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = K^2 \left[\frac{E^2}{4} + 2\sigma_x^4 + 2E^2 \sigma_x^2 \right] - K^2 \left[\frac{E^2}{4} + \sigma_x^4 + E^2 \sigma_x^2 \right] = K^2 \left[\sigma_x^4 + E^2 \sigma_x^2 \right].$$

Запишем соотношение сигнал/шум на выходе детектора:

$$\frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_{OC}^2}{\sigma_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{K^2 E^4 / 4}{K^2 (E^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^4)} = \frac{(E^2 / 2\sigma_x^2)^2}{1 + 2E^2 / 2\sigma_x^2},$$

где $(E^2 / 2\sigma_x^2)^2 = \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВХ}}$. При значениях сигнал/шум на входе $\ll 1$ (т. е. при $E^2 / 2 \ll \sigma_x^2$)

$$\frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВЫХ}} \approx \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВХ}}^2.$$

ВЫВОД. При малом отношении сигнал/шум на входе имеет место сильное подавление сигнала.

При значениях сигнал/шум на входе $\gg 1$ (т. е. при $E^2 / 2 \gg \sigma_x^2$)

$$\frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВЫХ}} \approx \frac{1}{2} \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \Big|_{\text{ВХ}}.$$

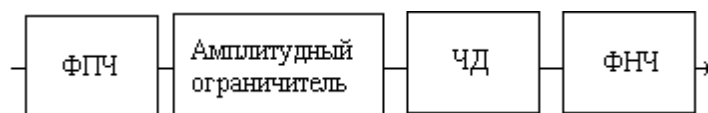
ВЫВОД. При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе пропорционально отношению сигнал/шум на входе.

Сопоставим результаты для линейного и квадратичного детекторов. При слабом сигнале детекторы ведут себя одинаково: отношение сигнал/шум на выходе пропорционально квадрату отношения сигнал/шум на входе.

При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе квадратичного детектора в четыре раза меньше, чем у линейного. Это объясняется тем, что при квадратичном детектировании сильный сигнал выносит помеху на участок характеристики с повышенной крутизной, что приводит к относительному увеличению помехи.

Наличие амплитудной модуляции сигнала не вносит существенных изменений в оценку отношения сигнал/шум на выходе детектора. Все результаты не зависят от соотношения между несущей частотой сигнала и мгновенной частотой помехи, т. е. наложение паразитной частотной или фазовой модуляции не оказывает существенного влияния на оценку отношения сигнал/шум на выходе детектора.

Совместное воздействие гармонического сигнала и нормального шума на частотный детектор



Структурная схема частотного детектора:

Сигнал на выходе амплитудного ограничителя представ-

ляет собой частотно-модулированное колебание $s(t) = A_s \cos(\omega_0 t + \frac{\omega_D}{\Omega} \sin \Omega t)$, а поме-

ха – случайный нормальный процесс со спектральной плотностью W_0 , равномерной в полосе пропускания ФПЧ (ω_d). Полоса пропускания ФНЧ от 0 до Ω_{\max} , где Ω_{\max} — наивысшая частота модуляции. Помеху запишем в виде $x(t) = A \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$.

Рассмотрим два режима:

1. При отсутствии полезной частотной модуляции суммарное колебание на выходе ограничителя равно

$$s(t) + x(t) = A_s \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = U(t) \cos[\omega_0 t + \xi(t)],$$

где $U(t) = \sqrt{A_s^2 + A^2(t) + 2A_s A(t) \cos \theta(t)}$ — амплитуда,

$\xi(t) = \arctg \frac{A(t) \sin \theta(t)}{A_s + A \cos \theta(t)}$ — фаза.

На выходе резонансного ограничителя колебательный контур настроен на частоту ω_0 . Обозначив порог ограничителя через $U_{\text{пор}}$, получим $u_{\text{вых}}(t) = U_{\text{пор}} \cos[\omega_0 t + \xi(t)]$.

Напряжение на выходе частотного детектора пропорционально значению мгновенной частоты входного сигнала (производной от полной фазы сигнала) и в отсутствие полезной модуляции является помехой: $x_{\text{вых}}(t) = S_{\text{+д}} \dot{\xi}(t)$, где $S_{\text{чд}}$ — крутизна характеристики частотного детектора.

На практике обычно выполняется соотношение $\frac{A_s^2}{2\sigma_x^2} \gg 1$, поэтому выражение для фазы можно упростить: $\xi(t) = \arctg \frac{A(t) \sin \theta(t)}{A_s} \approx \frac{A(t) \sin \theta(t)}{A_s}$.

При изучении теории узкополосных процессов было показано, что функция $A(t) \sin \theta(t)$ для гауссового шума обладает нормальным законом распределения и энергетическим спектром $2W_x(\omega_0 + \Omega)$, где W_x — спектральная плотность шума на частоте $(\omega_0 + \Omega)$. Таким образом, $W_{\xi}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega) / A_s^2$.

При дифференцировании нормального случайного процесса распределение остается нормальным. Следовательно, при высоком отношении сигнал/шум на входе частотного детектора процесс на выходе остается также нормальным. Таким образом,

$$W_{\xi'}(\Omega) = \Omega^2 W_{\xi}(\Omega) = \frac{2\Omega^2}{A_s^2} W_x(\omega_0 + \Omega).$$

Отсюда энергетический спектр помехи на выходе частотного детектора

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = S_{\text{+д}}^2 W_{\xi'}(\Omega) = \frac{2S_{\text{+д}}^2 \Omega^2}{A_s^2} W_x(\omega_0 + \Omega).$$

Корреляционная функция помехи на выходе ФНЧ:

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} W_{\text{вых}}(\Omega) e^{j\Omega\tau} d\Omega = \frac{2S_{\text{+д}}^2}{2\pi A_s^2} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0 + \Omega) e^{j\Omega\tau} d\Omega.$$

Дисперсия (средняя мощность помехи): $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = R_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{S_{\pm D}^2}{\pi A_s^2} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0 + \Omega) d\Omega$.

2. Случай тональной модуляции (режим частотной модуляции, при котором напряжение на выходе частотного детектора пропорционально девиации частоты). При этом $U_s = S_{\pm D} \omega_D$. Следовательно, отношение сигнал/шум на выходе

$$\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_s^2 / 2}{\sigma_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{\omega_D^2 A_s^2}{\frac{2}{\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0 + \Omega) d\Omega}.$$

Предположим, что шумовой процесс на входе является белым шумом со спектральным шумом $W_0 = \text{const}$, тогда $\int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_0 d\Omega = \frac{2\Omega_{\max}^3 W_0}{3}$.

Отсюда $\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = \frac{(A_s^2/2)3\omega_D^2}{(1/\pi)2\Omega_{\max}^3 W_0} = 3 \frac{A_s^2/2}{W_0 2(2F_{\max})} \left(\frac{\omega_D}{\Omega_{\max}} \right)^2$, где $\frac{A_s^2}{2}$ — мощность сигнала на входе, $W_0 2(2F_{\max}) = \sigma_x^2$ — мощность шума в двух полосах пропускания. В соответствии с этим $\left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВЫХ}} = 3 \left(\frac{\omega_D}{\Omega_{\max}} \right)^2 \left. \frac{\text{Сиг}}{\text{Шум}} \right|_{\text{ВХ}}$, где $\frac{\omega_D}{\Omega_{\max}}$ — индекс угловой модуляции.

ВЫВОД. Увеличивая индекс угловой модуляции, можно получить большой выигрыш в величине сигнал/шум в частотном детекторе по сравнению с величиной сигнал/шум в амплитудном детекторе.

Этот выигрыш будет иметь место, пока справедливо соотношение «сигнал больше помехи» и пока обеспечивается полное ограничение амплитуды колебания на входе детектора, иначе будет наблюдаться эффект гашения сигнала помехой.

11. Дискретная фильтрация сигналов

11.1. Характеристики и формы реализации дискретных фильтров

Под цифровой обработкой сигналов (ЦОС) понимают операции над дискретными во времени величинами (отсчетами сигналов). Дискретную величину, поступающую на вход устройства ЦОС в n -й момент времени ($n=0,1,2,\dots$), обозначим $x(n)$. Дискретную величину, получаемую на выходе устройства ЦОС в n -й момент времени, обозначим $y(n)$. Обычно входные величины поступают на устройство ЦОС и выдаются этим устройством с неизменным шагом Δ . Тогда можно записать:

$$x(n) = x(n\Delta), y(n) = y(n\Delta).$$

Чаще всего $\Delta \leq 1/2F_v$ является шагом равномерной дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$, поступающего на обработку.

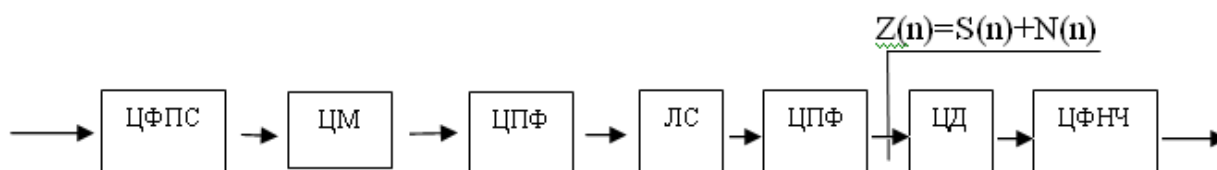
Сигналы на входе и выходе современных ЦОС дискретны не только во времени, но и квантованы по уровню, т. е. являются цифровыми сигналами. Однако в основном мы будем рассматривать работу ЦОС только с дискретными сигналами (так проще и нагляднее), а в конце этого раздела обсудим погрешности, возни-

кающие в устройствах ЦОС из-за квантования дискретных сигналов по уровню.

ЦОС имеет ряд существенных преимуществ перед аналоговой обработкой сигналов:

- 1) Достигается значительно более высокая точность обработки сигналов по сложным алгоритмам;
- 2) Возможна гибкая оперативная перестройка алгоритмов обработки сигналов, обеспечивающая как создание многорежимных устройств, так и реализацию адаптивных (подстраивающихся) систем;
- 3) Достигается высокая технологичность изготовления устройств ЦОС, связанная с отсутствием необходимости настройки при изготовлении и регулировке в процессе эксплуатации;
- 4) Обеспечивается высокая степень совпадения и повторяемости характеристик реализованных устройств с расчетными характеристиками;
- 5) Существуют большие возможности автоматизации проектирования устройств;
- 6) Обеспечиваются высокостабильные эксплуатационные характеристики устройств ЦОС.

Структурно одноканальную систему передачи сообщений (как непрерывных, так и дискретных) с использованием устройств ЦОС на передаче и приеме можно представить следующим образом.



Структурная схема передачи сообщений с использованием устройств ЦОС:

ЦФПС - цифровой формирователь первичного сигнала;

ЦМ - цифровой модулятор;

ЦПФ - цифровой полосовой фильтр;

ЦД - цифровой детектор (демодулятор);

ЦФНЧ - цифровой фильтр нижних частот;

ЛС - линия связи.

В системах передачи непрерывных сообщений (в том числе и цифровыми методами) помимо отмеченных на рисунке функций решаются и задачи цифрового компрессирования первичного сигнала на входе модулятора (сжатия динамического диапазона) и цифрового экспандирования (расширения динамического диапазона) сигналов на входе детектора.

Наиболее широкое применение нашли линейные устройства ЦОС, в которых сигналы входа и выхода связаны линейными соотношениями. Такими являются все фильтры в рассмотренной схеме, а также схемы ЦМ и ЦД, построенные на основе перемножения двух функций. Кроме того, практически все ЦФ являются

стационарными устройствами (свойства не зависят от времени).

Спектр дискретного сигнала

Определим дискретный сигнал $x_d(t)$ через совокупность отсчетов непрерывной функции $x(t)$:

$$x(k) = x(t = k\Delta). \quad (11.1)$$

Тогда сам дискретный сигнал можно записать в виде модели:

$$x_d(t) = x(t)f_n(t), \quad (11.2)$$

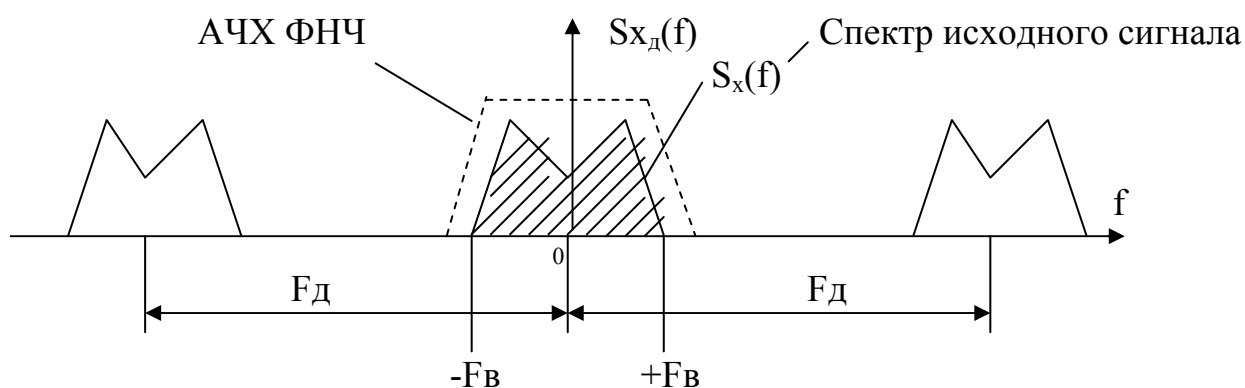
где $f_n(t) = \Delta \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta)$ - безразмерная периодическая (с периодом Δ)

решетчатая функция.

Покажем, что дискретный сигнал (11.1) имеет спектр по Фурье вида

$$\dot{S}_g(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f - kF_d), \quad (11.3)$$

где $\dot{S}_x(f)$ - спектр исходного непрерывного сигнала $x(t)$. Из (11.3) следует, что спектр дискретного сигнала повторяется с периодом частоты дискретизации F_d .



Амплитудный спектр первичного дискретного сигнала

Из математики известно (задача Парсеваля), что спектр Фурье от произведения двух функций определяется сверткой спектров сомножителей, где $\dot{S}_{fn}(f)$ - спектр по Фурье периодической функции $f_n(t)$ с периодом Δ , которая представима комплексным рядом Фурье:

$$\dot{S}_{x_d}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(\xi) \dot{S}f_n(f - \xi) d\xi \quad (11.4)$$

$$f_n = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi \frac{kt}{\Delta}}, \quad C_k = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{kt}{\Delta}} dt = \frac{1}{\Delta}$$

(при интегрировании учтено фильтрующее свойство δ -функции).

Спектральная плотность периодической функции

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{kt}{\Delta}}$$

определяется суммой δ -функций:

$$\dot{S}_f(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF), \quad F = \frac{1}{\Delta}. \quad (11.5)$$

С учетом (11.5) интегрирование (11.4) дает результат (11.3). Из спектра (11.3) можно без искажений восстановить спектр $\dot{S}_x(f)$, следовательно, и сам непрерывный сигнал $x(t)$, только при условии, если отдельные копии спектра $\dot{S}_x(f - kF_d)$ взаимно не пересекаются. Это возможно, если $F_d \geq 2F_b$ или $\Delta \leq 1/2F_b$. Восстановление осуществляют фильтром нижних частот, АЧХ которого показана на предыдущем рисунке пунктирной линией. Реализация такого фильтра тем проще, чем сильнее выполняется неравенство $F_d \geq 2F_b$.

Спектр дискретного сигнала можно определить не только по формуле (11.3),

$$X_{дф}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta(t - k\Delta), \quad N = \frac{T}{\Delta}. \quad (11.6)$$

но и путем непосредственного применения прямого преобразования Фурье к функции (11.1). Это дает следующий результат:

Определим теперь спектр Фурье дискретного финитного (непериодического) сигнала, определенного на интервале $(0; T)$. Такой финитный сигнал можно записать в виде

$$\dot{S}_{x_d}(f) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k \Delta}. \quad (11.7)$$

Спектр сигнала (11.7) можно найти, если его периодически продолжить направо и налево с периодом T . Тогда получаем периодический сигнал $X_{д пер}(t)$, совпадающий с $X_{дф}(t)$ на интервале $(0; T)$, для которого комплексные амплитуды \dot{C}_n можно получить из (11.6) при $\omega = 2\pi n/T$ суммированием от $k=0$ до $k=N-1$ и с учетом множителя $1/T$:

$$\dot{C}_n = \frac{\Delta}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi n}{T} k \Delta} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (11.8)$$

Формула (11.8) определяет коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Из нее следует, что при заданных N отсчетах $x(k)$ существует N коэффициентов ДПФ ($n=0,1,2,3,\dots,N-1$). Коэффициент $\dot{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$ определяет постоянную составляющую. При четном N из (11.8) следует для вещественных $x(k)$:

$$\dot{C}_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x(k), \quad \dot{C}_{\frac{N}{2}+n}^* = \dot{C}_{\frac{N}{2}-n}, \quad n=1,2,\dots,\frac{N}{2}-1, \quad (11.9)$$

т. е. коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют комплексно-сопряженные пары. Можно считать, что коэффициенты $\dot{C}_{N/2}, \dot{C}_{N/2+2}, \dots, \dot{C}_{N-1}$ соответствуют отрицательным частотам. Число же амплитуд, образующих спектр ДПФ, равно $N/2$. Это следует из теоремы отсчетов Котельникова при $\Delta=1/2F_B$. При таком условии спектр $x_{\text{дпер}}(t)$ содержит $F_B/(1/T)=T(2\Delta)=N/2$ амплитуд.

При заданных \dot{C}_n ($n=0,1,2,3,\dots,N-1$) функцию $x(k)$ можно определить с помощью обратного преобразования Фурье (ОДПФ), представляя периодическую функцию $x_{\text{пер}}(t)$ с периодом T рядом Фурье:

$$X_{\text{пер}}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \dot{C}_m e^{\frac{j2\pi mt}{N}}. \quad (11.10)$$

Положив в (11.10) $t=k\Delta$, получаем ОДПФ:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \dot{C}_m e^{\frac{2\pi jkn}{N}}. \quad (11.11)$$

Как прямое, так и обратное преобразования Фурье линейны.

11.2. Использование дискретного преобразования Фурье и метода Z-преобразования в анализе дискретных фильтров

Алгоритм быстрого преобразования Фурье

При вычислении N коэффициентов ДПФ согласно (11.8) или ОДПФ согласно (11.11) надо выполнить N^2 достаточно трудоемких операций умножения. При

больших массивах N (порядок 10^3 и выше) использование (11.8) и (11.11) в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного быстродействия вычислительных устройств. Задача существенно упрощается с применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые сводят обработку заданного массива данных к обработке массивов с меньшим числом членов, и тем самым существенно уменьшается требуемое число операций умножения.

Сущность одного из алгоритмов БПФ для вычисления коэффициентов \dot{C}_n для массива вещественных данных $\{x(\ell)\}$, объема $N=2^r$, где r - целое число, состоит в следующем.

Разобьем исходный массив данных $\{x(\ell)\}$ на две части с четными и нечетными номерами:

$$\{x_{\text{ч}}^1(\ell) = x^1(2k)\} \text{ и } \{x_{\text{неч}}^1(\ell) = x^1(2k+1)\}, \text{ где } k = 0,1,2,\dots,N-1.$$

Согласно (11.8) коэффициенты $N \cdot \dot{C}_n$ на первом этапе разбиения равны

$$\begin{aligned} C_n N &= \sum_{k=0}^{N/2-1} [x^1(2k)e^{-j\frac{4\pi k n}{N}} + x^1(2k+1)e^{-j\frac{4\pi(2k+1)n}{N}}] = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{\text{чет}}^1(k)e^{-j\frac{2\pi k n}{N/2}} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{\text{неч}}^1(k)e^{-j\frac{2\pi k n}{N/2}} = \\ &= \dot{C}_{n \text{ чет}}^1 + W_N^n \dot{C}_{n \text{ неч}}^1, \quad n = 0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1, \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Из (11.12) следует, что последовательности коэффициентов $\dot{C}_{n \text{ чет}}^1$ и $\dot{C}_{n \text{ неч}}^1$ обладают свойством периодичности с периодом $N/2$:

$$\dot{C}_{n \text{ чет}}^1 = \dot{C}_{n+\frac{N}{2} \text{ чет}}^1, \quad \dot{C}_{n \text{ неч}}^1 = \dot{C}_{n+\frac{N}{2} \text{ неч}}^1, \quad n = 0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1. \quad (11.13)$$

Кроме того, для $n > N/2$ множитель W_N^n в (12) можно представить в виде

$$W_N^{n+\frac{N}{2}} = e^{-jn} W_N^n = -W_N^n, \quad n = 0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1. \quad (11.14)$$

С учетом (12), (13) и (14) для всех $n=0,1,2,3\dots N-1$ можно записать:

$$\dot{C}_N N = \dot{C}_{n \text{ неч}}^1 \pm W_N^n \dot{C}_{n \text{ чет}}^1. \quad (11.15)$$

Причем знак "-" соответствует значениям $n=N/2, N/2+1, \dots, N-1$. Подсчитаем, сколько требуется операций умножения при вычислении всех значений $\dot{C}_n N$ по алгоритму (11.15). Для вычисления всех $\dot{C}_{n \text{ чет}}^1$ по (11.12) требуется $(N/2)^2$ умножений. Столько же умножений требуется для вычисления всех $\dot{C}_{n \text{ неч}}^1$. Кроме того, потребуется N умножений $\dot{C}_{n \text{ неч}}^1$ на число $\pm W_N^n$. Следовательно, потребуется $2(N/2)^2 + N$ умножений. При больших N требуемое число умножений равно

$N^2/2 = N \log_2 N$ (при $N=4$), что в 2 раза меньше, чем по алгоритму (11.8).

Четные отсчеты исходной последовательности $X^{чет}(k)$ (их всего $N/2$) разобьем далее на втором этапе разбиения на четные и нечетные компоненты $x''(2k)$ и $x''(2k+1)$ (их число равно $N/4$). ДПФ последних обозначим $\dot{C}''_{неч}$ и $\dot{C}''_{чет}$. Тогда можно написать:

$$\dot{C}^1_{неч} = \dot{C}''_{неч} + N^{n}_{N/2} \dot{C}^1_{неч}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (11.16)$$

Аналогичное разбиение выполняется над нечетными отсчетами исходной последовательности $X^{неч}(k)$. Для вычисления всех $\dot{C}^1_{неч}$ согласно формулам типа (11.16) (по массиву данных) $X^{чет}(k)$ и $X^{неч}(k)$

потребуется число умножений $2 \left[2 \left(\frac{N}{4} \right)^2 + \frac{N}{2} \right] 2 \approx N \log_2 N$ (при $N=8$).

Процесс разбиений можно продолжать r раз до тех пор, пока не получится последовательность из одного элемента, ДПФ которого совпадает с самим элементом. Далее надо собрать результаты отдельных разбиений для вычисления суммарных значений $\dot{C}^1_{неч}$. Анализ показывает, что число операций умножения, необходимых для вычисления БПФ, не больше, чем $Nr = N \log_2 N$, что при больших N существенно меньше, чем N^2 . БПФ по рассматриваемому методу осуществляют в следующем порядке. Сначала для получения желательного при обработке сигнала порядка следования отсчетов $x(k)$, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ выполняется двоично-инверсная перестановка исходной последовательности $x(q)$, $q=0, 1, \dots, N-1$. Для этого записывают порядковые номера элементов $x(q)$ в двоичном коде и инвертируют порядок следования разрядов. Новый порядок следования элементов $x(k)$ определяется номерами, получаемыми после инверсии разрядов.

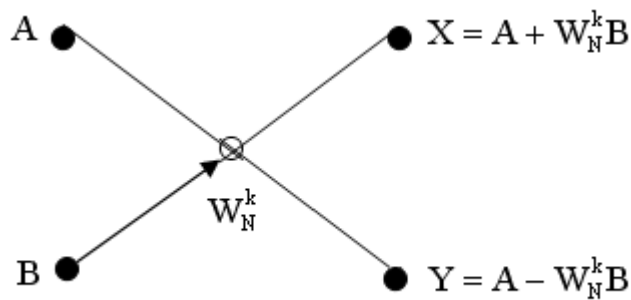
Пример для $N=4$

$x(q)$			$x(k)$
$0 \rightarrow$	$00 \rightarrow$	$00 \rightarrow$	$0 \rightarrow$
$1 \rightarrow$	$01 \rightarrow$	$10 \rightarrow$	$2 \rightarrow$
$2 \rightarrow$	$10 \rightarrow$	$01 \rightarrow$	$1 \rightarrow$
$3 \rightarrow$	$11 \rightarrow$	$11 \rightarrow$	$3 \rightarrow$

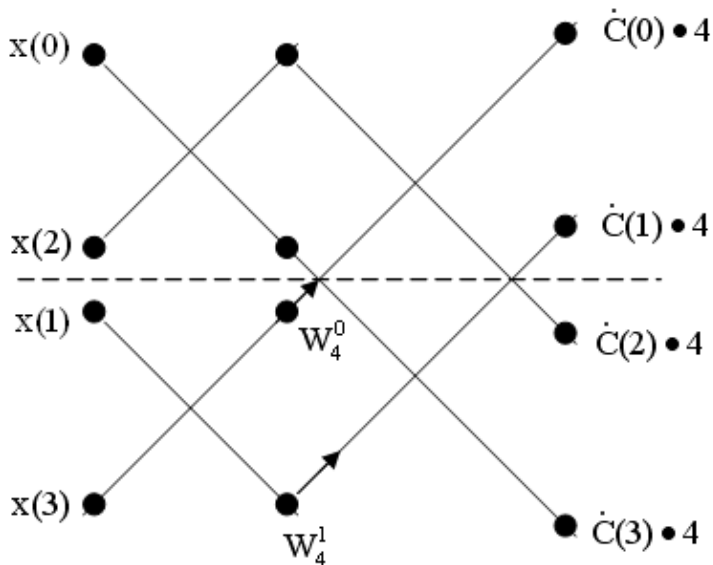
Новый порядок следования элементов следующий: $x(0)$, $x(2)$, $x(1)$, $x(3)$. После этого поступают так: на первом этапе вычислений определяют 2 - точечные элементы ДПФ "новой" последовательности $x(k)$, объединяя попарно элементы этой последовательности; на втором этапе из 2 - точечных ДПФ получают 4 - точечные ДПФ, пользуясь основной операцией данного метода (об этом ниже); затем 4- точечные ДПФ объединяются в 8 - точечные и т. д.

Базовые операции показывают, как два входных числа A и B объединяются для получения двух выходных чисел X и Y . Для метода прореживания во времени базовая операция имеет вид:

- в графическом виде



Операция "бабочка", используемая при реализации алгоритма БПФ (стрелка означает умножение W_N^k на B).



Граф для вычисления БПФ при $N=4$

-или в форме уравнений

$$\left. \begin{aligned} X &= A + W_N^k B \\ Y &= A - W_N^k B \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

При вычислении двухточечного ДПФ $k=0$ и выходные числа X и Y определяются без операции умножения $X=A+B$, $Y=A-B$.

Чтобы воспользоваться рассмотренной процедурой БДПФ для вычисления ОДПФ, запишем (11.11) в виде

$$X(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_n^* e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \right]^* \quad (11.18)$$

*) – комплексно-сопряженные числа.

Вводя массив данных C вместо $x(n)$, можно найти сумму в (11.18) по изложенной выше методике БДПФ, а затем для нахождения $x(k)$ найти комплексно-сопряженное значение полученного результата.

Существуют и другие методы вычисления БДПФ, т. е. другие методы группирования исходных данных $x(k)$.

Подобно тому, как отклик аналоговой линейной стационарной системы $y(t)$ на произвольное внешнее воздействие $x(t)$ можно найти временным методом через импульсную характеристику системы $g(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (11.19)$$

или спектральным методом через комплексный коэффициент $k(\omega)$ передачи цепи, так и отклик линейного стационарного цифрового фильтра $y(n)$ на произвольное внешнее воздействие $x(n)$ можно найти через импульсную характеристику ЦФ $g(n)$ или спектральным методом.

Выполнив в (11.19) дискретизацию по переменным τ и t , положив $\tau=k\Delta$, $t=m\Delta$, получаем цифровой аналог свертки (11.19):

$$y(m) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(m-k), \quad (11.20)$$

где $g(\ell)$, $\ell=0,1,2,\dots,L$ – отсчеты импульсной характеристики ЦФ, т. е. отклика на единичный импульс $(1,0,0,0,0,0,\dots)$, поступающий на вход фильтра в момент времени $t=0$. Из условий реализуемости ЦФ надо принять:

$$g(-\ell)=0, \ell=1,2,\dots \quad (11.21)$$

Если входные отсчеты $x(k)$ начинают поступать в момент $t=0$, то можно написать:

$$y(m) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x(k)g(m-k) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} g(k)x(m-k). \quad (11.22)$$

Из условия реализуемости ЦФ (11.21) следует, что суммирование в (11.22) фактически выполняется только при $k \leq m$:

$$y(m) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x(k)g(m-k). \quad (11.23)$$

Если число входных отсчетов $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ равно N , а число отсчетов импульсной характеристики ЦФ $(g(0), g(1), \dots, g(L))$ равно $(L+1)$, то в (11.23) m принимает значения $0, 1, 2, \dots, N_{\Sigma}-1$ ($N_{\Sigma}=N+L$). Для нахождения одного значения $y(m)$ в соответствии с (11.23) надо выполнить не более чем $(L+1)$ операций умножения. Для нахождения всех значений $y(m)$ надо выполнить примерно $N_{\Sigma} (L+1)$ операций умножения.

Число операций можно существенно сократить, если использовать спектральный метод расчета ЦФ и методы БПФ. Чтобы это показать, напомним сначала дискретную свертку (11.23) в нормированном виде:

$$y(m) = \frac{1}{N_{\Sigma}} \sum_{k=0}^{N_{\Sigma}-1} x(k)g(m-k). \quad (11.24)$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N_{\Sigma}-1} \dot{C}_{x,n} e^{j \frac{2\pi nk}{N_{\Sigma}}}. \quad (11.25)$$

Дополнив последовательность из N входных отсчетов $x(k)$ L нулями, предста-

вим $x(k)$ через ОДПФ.

Дополнив последовательность из $(Q+1)$ отсчетов импульсной характеристикой ЦФ $(N+1)$ нулями, определим ОДПФ:

$$g(m-k) = \sum_{\ell=0}^{N_{\Sigma}-1} \dot{C}_{g\ell} e^{j\frac{2\pi q}{N}(m-k)}, \quad (11.26)$$

где $\dot{C}_{g,\ell}$ - коэффициенты ДПФ для импульсной характеристики ЦФ.

Подставляя (11.25) и (11.26) в (11.24), получаем

$$y(m) = \frac{1}{N_{\Sigma}} \sum_{n=0}^{N_{\Sigma}-1} \sum_{\ell=0}^{N_{\Sigma}-1} \dot{C}_{x,n} \dot{C}_{g,\ell} e^{j\frac{2\pi q m}{N_{\Sigma}}} \sum_{k=0}^{N_{\Sigma}-1} e^{j\frac{2\pi k(n-q)}{N_{\Sigma}}}. \quad (11.27)$$

Справедливо условие

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k(n-q)}{N}} = \begin{cases} N, & \text{при } n = \ell \\ 0, & \text{при } n \neq \ell. \end{cases} \quad (11.28)$$

Равенство суммы N при $n=\ell$ очевидно. Равенство же суммы нулю при $n \neq \ell$ объясняется тем, что в этом случае имеем сумму единичных векторов, образующих в совокупности правильный N -угольник. Сумма эта, естественно, равна нулю.

С учетом (11.28) формула (11.27) принимает вид

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N_{\Sigma}-1} \dot{C}_{x,n} \dot{C}_{g,n} e^{j\frac{2\pi n m}{N_{\Sigma}}}. \quad (11.29)$$

Уравнение (11.29) определяет ОДПФ выходных отсчетов ЦФ, если ДПФ над этими отсчетами определяется произведением ДПФ входных отсчетов и отсчетов

$$\dot{C}_{y,n} = \dot{C}_{x,n} \cdot \dot{C}_{g,n}. \quad (11.30)$$

импульсной характеристики фильтра:

Если методами БПФ найти спектральные компоненты $\dot{C}_{x,n}$ и $\dot{C}_{g,n}$, а затем и ОДПФ от их произведения $C_{yn} = C_{xn} C_{gn}$, то можно при больших N существенно сэкономить в вычислительных операциях по сравнению с непосредственными вычислениями $y(m)$ по формуле дискретной свертки.

Z-преобразование

Это преобразование можно получить из преобразования Лапласа или Фурье для дискретного сигнала $x_g(t)$.

Определим одностороннее преобразование Лапласа (для сигналов, определенных при $t \geq 0$ для дискретного сигнала вида (11.1)):

$$F_{X_g}(p) = \int_0^{\infty} x_g(t) e^{-pt} dt = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e^{-pk\Delta}. \quad (11.31)$$

При $p=j\omega$ из (11.31) следует преобразование Фурье для дискретного сигнала. Если обозначить:

$$z = e^{p\Delta}, \quad (11.32)$$

то преобразование Лапласа (11.31) переходит в Z- преобразование дискретного сигнала $X_g(t)$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}. \quad (11.33)$$

Очевидно, что из преобразования Фурье дискретного сигнала $X_g(t)$ следует также Z-преобразование $X(z)$,

$$z = e^{j\omega\Delta}. \quad (11.34)$$

Справедливо и обратное утверждение: из Z-преобразования $X(z)$ дискретного сигнала (11.33) при $z = e^{p\Delta}$ следует преобразование Лапласа. Или из $X(z)$ при $z = e^{j\omega\Delta}$ следует преобразование Фурье сигнала.

Если дискретный сигнал $X_g(t)$ определен и при $t < 0$, то вместо (11.33) можно ввести более общее преобразование для такого сигнала:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}. \quad (11.35)$$

Следует оговорить сходимость $X(z)$ при неограниченном числе слагаемых в (11.33) или (11.35). Отсчеты $x(k)$ всегда удовлетворяют условию $|x(k)| < CR^k$, $k \geq 0$, $C > 0$ и $R > 0$ - постоянные вещественные числа. Тогда (11.33) сходится при всех Z , для которых $|z| > R$ (т. е. в кольцевой области с радиусом сходимости R). В области сходимости $X(z)$ представляет собой аналитическую функцию переменной z , не имеющую в этой области ни полюсов, ни существенно особых точек.

Для нахождения $x(k)$ по $X(z)$ (т. е. обратного Z-преобразования) умножим левую и правую части (11.33) на Z^{n-1} :

$$X(z)Z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{n-1-k}. \quad (11.36)$$

Возьмем от левой и правой частей (36) интеграл по z по замкнутому контуру в области аналитичности, охватывающей все полюсы функции $X(z)z^{n-1}$. Получим следующий результат:

Этот результат следует из теоремы Коши при интегрировании функции ком-

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz. \quad (11.37)$$

плексного переменного z :

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1. \end{cases} \quad (11.38)$$

Наиболее важное свойство Z-преобразования связано со сдвигом сигнала во времени:

$$Y(z) = Z^{-1}X(z), \text{ если } y(k) = x(k-1). \quad (11.39)$$

Таким образом, Z-преобразование дискретного сигнала $y(t)$, у которого все отсчеты смещены на один такт в сторону запаздывания относительно дискретного сигнала $X_g(t)$, равно произведению z^{-1} на $X(z)$. Можно сказать, что z^{-1} является оператором сдвига на один такт в сторону запаздывания. Для доказательства (11.39) запишем Z-преобразование последовательности $\{y(k)=x(k-1)\}$:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k-1)z^{-k}. \quad (11.40)$$

Вводя переменную $k-1=n$, из (11.40) получим (11.39). Очевидно, если $y(k)=x(k-n)$, то $Y(z)=z^{-n}X(z)$.

Рассмотрим дискретную свертку конечной протяженности ℓ :

$$y(\ell) = \sum_{k=-\infty}^{\ell} x(k)g(\ell-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)x(k-\ell). \quad (11.41)$$

Найдем Z-преобразование этой свертки:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(\ell-k)z^{-\ell} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} g(\ell-k)z^{-(\ell-k)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)z^{-n} = X(z)G(z). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Таким образом, свертка двух дискретных сигналов соответствует произведению их Z-преобразований.

Покажем, что импульсная характеристика ЦФ $\{g(0), g(1)\dots g(\ell)\}$ является его откликом на единичный импульс $(1,0,0,0,0,\dots)$. Действительно, при воздействии единичного импульса формула (11.41) принимает вид

$$y(\ell)=g(\ell), \ell=0,1,2,\dots \quad (11.43)$$

Если импульсная характеристика ЦФ финитна, то

$$y(\ell)=0 \text{ при } \ell=Q+1, \quad (11.44)$$

где $(L+1)$ - число тактовых отрезков на интервале финитности.

Рассмотрим прохождение через линейный ЦФ гармонической последовательности вида $x(t)=e^{j(\omega t + \varphi)}$ или в дискретном виде

$$x(k)=e^{j(\omega k\Delta + \varphi)}. \quad (11.45)$$

Согласно формуле свертки (11.41) с учетом (11.45) находим выходной сигнал:

$$y(\ell) = e^{j\varphi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k\Delta} g(\ell-k) = e^{j(\omega q\Delta + \varphi)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\ell-k) e^{-j\omega(\ell-k)\Delta}.$$

Введем над знаком суммы новый индекс суммирования $q-k=n$ и учтем, что из соображений реализуемости $g(n)=0$ при $n<0$. Тогда

$$y(\ell) = e^{j(\omega q \Delta + \varphi)} \dot{K}_{\text{цф}}(f), \quad (11.46)$$

где

$$K_{\text{цф}}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) e^{-j\omega n \Delta} \quad (11.47)$$

- комплексная передаточная характеристика ЦФ. Импульсная характеристика ЦФ в реальном масштабе времени будет иметь вид

$$g_{\text{цф}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \sigma(t - k\Delta), \quad (11.48)$$

причем $\dot{K}_{\text{цф}}(f)$ является преобразованием Фурье от дискретного сигнала вида (11.48).

Как следует из (11.47), $\dot{K}_{\text{цф}}(f)$ является периодической функцией частоты дискретизации $F_g=1/\Delta$ (как и спектр дискретного сигнала).

Если в (11.47) ввести переменную $z=e^{j\omega\Delta}$, то получим Z-преобразование импульсной характеристики ЦФ:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}. \quad (11.49)$$

$H(z)$ называют системной функцией стационарного линейного ЦФ.

Из (11.42) при замене $G(z)$ на $H(z)$ видно, что системная функция ЦФ определяется как отношение Z-преобразования выходного сигнала фильтра к Z-преобразованию входного сигнала:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (11.50)$$

$$K_{\text{цф}}(j\omega) = H(z = e^{j\omega\Delta}). \quad (11.51)$$

Если в системной функции ЦФ положить $z = e^{j\omega\Delta}$, получим частотную характеристику ЦФ:

Таким образом, применение Z-преобразований позволяет проводить анализ цифровых фильтров теми же методами, что и анализ аналоговых линейных цепей.

Основы реализации цифровых фильтров

В общем случае в линейном стационарном цифровом фильтре k -й выходной отсчет $y(k)$ (в момент времени $t=k\Delta$) линейно зависит от k -го входного отсчета $x(k)$ и некоторого количества предшествующих отсчетов $x(\ell)$ ($\ell < k$), а также от некоторого количества выходных отсчетов $y(\ell)$ ($\ell < k$):

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_Qx(k-Q) + b_1y(k-1) + \dots + b_My(k-M). \quad (11.52)$$

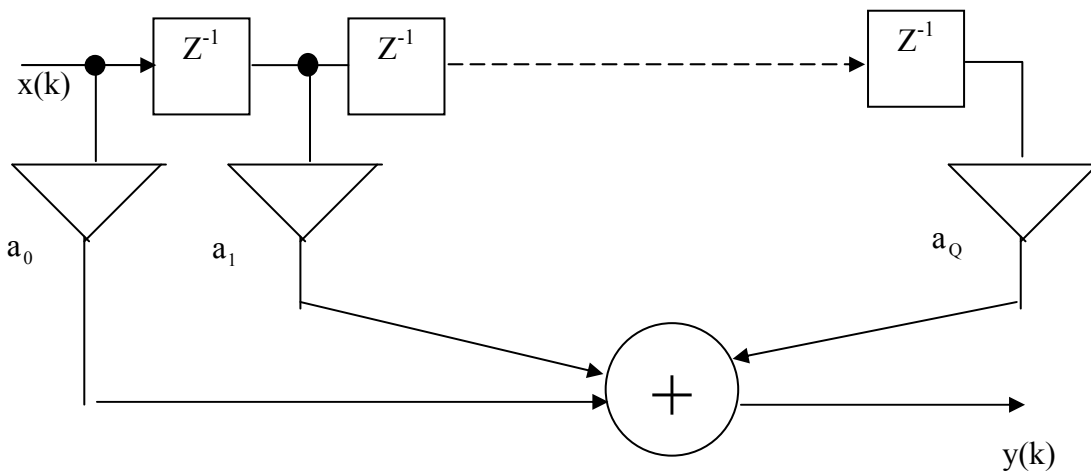
Числа L и M в разностном уравнении (11.52) называют соответственно относительной памятью ЦФ по входу и выходу. ЦФ с памятью по входу называются рекурсивными, а без такой памяти нерекурсивными.

Алгоритмы работы различных ЦФ отличаются параметрами Q и M и набором коэффициентов $\{a_\ell\}$ и $\{b_i\}$. Рассмотрим сначала реализацию нерекурсивных ЦФ, когда все $b_i=0$ (т. е. $M=0$).

В этом случае разностное уравнение (11.52) принимает вид

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_Qx(k-Q). \quad (11.53)$$

Структурная схема ЦФ, реализующая алгоритм (11.53), приведена на следующем рисунке.



Структурная схема построения нерекурсивного (трансверсального) ЦФ

Основными элементами ЦФ являются блоки задержки отсчетных значений на один тактовый интервал (условно обозначены символом z^{-1}), а также масштабные блоки aq (усилители). Сигналы с последних собираются в сумматор, образуя входной отсчет. Посредством разностного уравнения (11.53) можно построить лишь ЦФ с финитной (конечной) импульсной характеристикой $\{g(0), g(1), \dots, g(Q)\}$. Если на вход схемы трансверсального типа подать единичный импульс $(1, 0, 0, 0, \dots)$, то по определению отклик ЦФ есть его импульсная характеристика $g(t)$. Это возможно лишь при условии, что в трансверсальном ЦФ отсчеты импульсной характеристики $g(q)$ совпадают с коэффициентами a_ℓ , $\ell=0, 1, 2, \dots, Q$. Взяв Z -преобразование от левой и правой частей (11.53), получаем

$$Y(z) = X(z)[a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Qz^{-Q}]$$

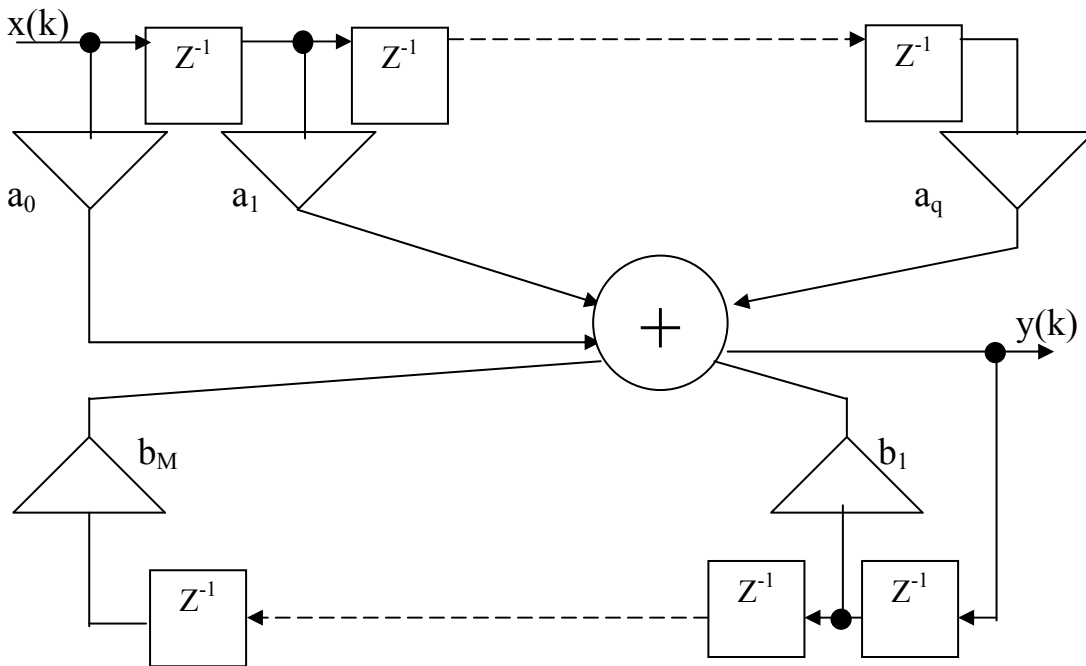
Тогда системная функция трансверсального фильтра будет иметь вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^Q a_k z^{-k} = \frac{a_0 z^Q + a_1 z^{Q-1} + \dots + a_Q}{z^Q}. \quad (11.54)$$

Равенство (11.54) определяет дробно-рациональную функцию от Z . Она имеет L -кратный полюс при $Z=0$ и L нулей, определяемых корнями полинома числителя формулы (11.54). Последние зависят от отсчетов импульсной характеристики ЦФ $g(\ell)=a_\ell$. Частотная характеристика трансверсального цифрового фильтра согласно (11.54) и (11.51) имеет вид

$$\dot{K}_{\text{цф}}(f) = \sum_{k=0}^Q a_k e^{-j\omega k \Delta}. \quad (11.55)$$

Рассмотрим теперь работу ЦФ, работающего по общему алгоритму (11.52).



Структурная схема построения рекурсивного ЦФ

Взяв Z -преобразование от левой и правой частей (11.52), получим

$$Y(z) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_Q z^{-Q}) + Y(z)(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}).$$

Отсюда следует выражение для системной функции цифрового рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^L a_k Z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M b_k Z^{-k}} = \frac{a_0 z^{M-L} (z^Q + \frac{a_1}{a_0} + \dots + \frac{a_Q}{a_0})}{z^M - b_1 z^{M-1} - \dots - b_M}. \quad (11.56)$$

В реализуемых цифровых фильтрах обычно $M > Q$. При таких условиях дробно-рациональная функция (11.56) имеет на Z -плоскости L нулей, определяемых

корнями Zoi уравнения

$$z^L + \frac{a_1}{a_0} z^{L-1} + \dots + \frac{a_{L-1}}{a_0} + \frac{a_L}{a_0} = 0;$$

где $M-L$ -кратный ноль в точке $Z=0$;

M - число полюсов, определяемых корнями Zni уравнения

$$z^M - b_1 z^{M-1} - \dots - b_{M-1} z - b_M = 0. \quad (11.57)$$

Если коэффициенты $b\ell$ ($\ell=1, M$) вещественны, то корни уравнения (11.57) (т. е. полюсы $H(z)$) лежат либо на вещественной оси, либо образуют комплексно - сопряженные пары.

Системной функции (11.56) соответствует частотная характеристика ЦФ:

$$\dot{K}_{цф} = \frac{a_0 e^{j\omega\Delta(M-L)} \prod_{i=1}^Q R_{0,i}}{\prod_{i=1}^M R_{0,i}},$$

где $R_{0,i} = e^{j\omega\Delta} - z_{0,i}$, $R_{n,i} = e^{j\omega\Delta} - z_{n,i}$.

АЧХ фильтра (в децибелах) определяется формулой

$$K_{об}(\omega) = 20 \left[\lg a_0 + \sum_{i=1}^Q \lg |R_{0,i}| - \sum_{i=1}^M \lg |R_{n,i}| \right].$$

За счет наличия обратной связи рекурсивные ЦФ характеризуются нефинитной (длящейся неограниченно) импульсной характеристикой (откликом на единичный импульс $1, 0, 0, 0, \dots$).

Система с обратной связью нуждается в исследовании на устойчивость. ЦФ устойчив, если $|yn|$ при $n \rightarrow \infty$ не превышает некоторого положительного числа A , независимо от выбора начальных условий в схеме. Чтобы исследовать устойчивость схемы, надо исследовать поведение свободных колебаний, т. е. уравнение (11.52) при отсутствии внешнего воздействия

$$y(k) - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) - \dots - b_M y(k-M) = 0. \quad (11.58)$$

Известно, что отдельное свободное колебание в линейной стационарной системе определяется выражением e^{pt} . При $t=k\Delta$ имеем e^{pit} . Обозначив $e^{pit} = \lambda$, решение уравнения (11.58) можно искать в виде

$$y(k) = \lambda^k. \quad (11.59)$$

Подставляя (11.59) в (11.58), получаем характеристическое уравнение, определяющее λ :

$$\lambda^M - b_1 \lambda^{M-1} - \dots - b_M = 0. \quad (11.60)$$

Уравнение (11.60) совпадает с уравнением (11.57), которому удовлетворяют

$$y(k) = A_1 z_k^1 + A_2 z_k^2 + \dots + A_M z_k^M, \quad (11.61)$$

полюсы системной функции рекурсивного ЦФ (классический алгебраический критерий устойчивости Раунса-Гурвица).

При найденных корнях уравнения (11.60) или (11.57) $\lambda_k = z_k$, $k=1, \dots, M$, общее решение уравнения (11.58) можно представить в виде
 где ограниченные коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_M определяются начальными условиями.

Для момента времен с номером $(k+1)$ из (11.61) следует

$$y(k+1) = A_1 z_1^{k+1} + A_2 z_2^{k+1} + \dots + A_M z_M^{k+1}. \quad (11.62)$$

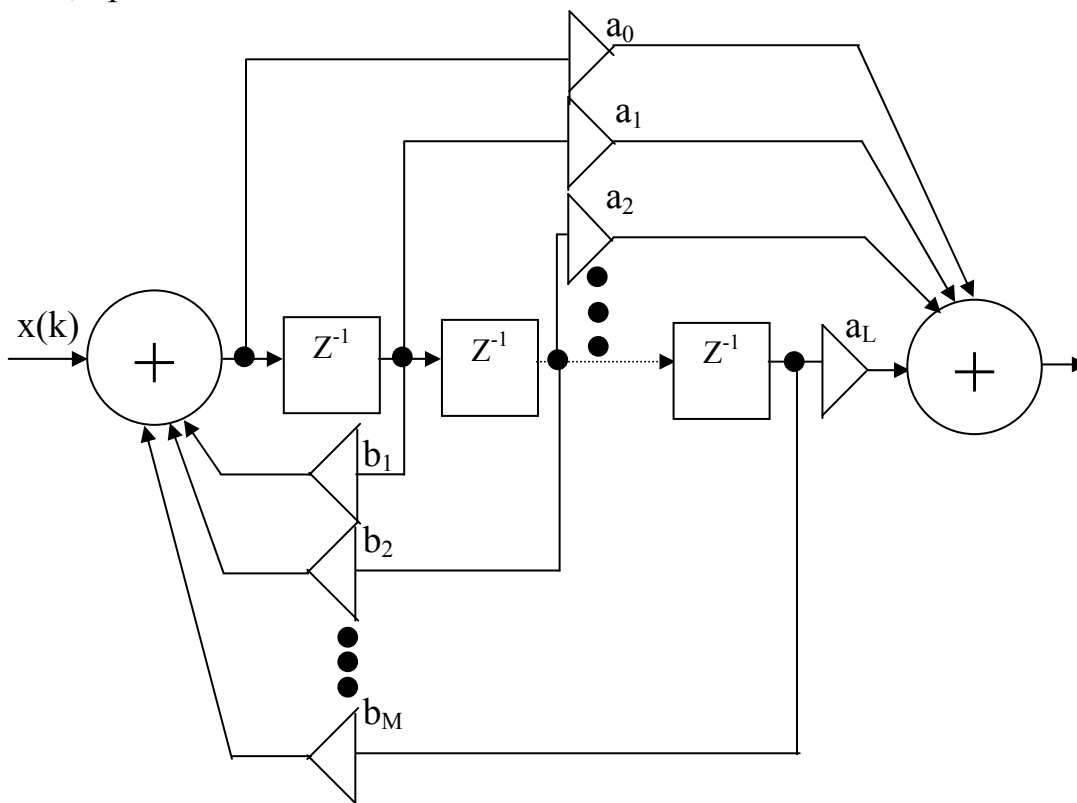
Если все полюса системной функции (11.56) удовлетворяют условию

$$|z_k| < 1, \quad k = \overline{1, M}, \quad (11.63)$$

т. е. они лежат внутри единичного круга с центром в точке $z=0$, то на основании (11.61) и (11.62) можно прийти к заключению, что все свободные колебания во времени определяются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии и фильтр будет устойчивым.

Недостатком рассмотренной схемы рекурсивного ЦФ является наличие отдельных элементов задержки для входных и выходных отсчетов.

Этот недостаток устранен в так называемой канонической схеме рекурсивного ЦФ, использующего общие элементы задержки для входных и выходных отсчетов, при $M=L$.



Каноническая схема реализации рекурсивного ЦФ

Каноническая схема идентична ранее рассмотренной схеме рекурсивного ЦФ. Чтобы это доказать, определим системную функцию ЦФ по канонической схеме. Обозначим значения дискретного отсчета в k -й момент времени на выходе первого сумматора через $W(k)$. Согласно схеме очевидна справедливость уравнения

$$W(k) = x(k) + b_1W(k-1) + b_2W(k-2) + \dots + b_MW(k-M). \quad (11.64)$$

Дискретный сигнал на выходе второго сумматора в k -й момент времени

$$y(k) = a_0W(k) + a_1W(k-1) + \dots + a_QW(k-Q). \quad (11.65)$$

Выполним Z -преобразование над правой и левой частями (11.64-11.65). Получим

$$W(z)[1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2} - \dots - b_Mz^{-M}], \quad (11.66)$$

$$Y(z) = W(z)[a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Qz^{-Q}] \quad (11.67)$$

Приравняв значения $W(z)$ из (11.66) и (11.67), имеем

$$\frac{X(z)}{1 - b_1z^{-1} - \dots - b_Mz^{-M}} = \frac{Y(z)}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Qz^{-Q}}.$$

Полученный результат не отличается от (11.56), что доказывает идентичность полной и канонической схем рекурсивного ЦФ.

12. Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров

Большое практическое значение имеют методы синтеза ЦФ с требуемым видом импульсной или частотной характеристик ЦФ. Рассмотрим некоторые приемы синтеза ЦФ по заданным характеристикам их аналоговых прототипов.

Синтез по заданной импульсной характеристики аналогового прототипа $g(t)$

ЦФ строится с импульсной характеристикой, которая является результатом дискретизации $g(t)$, т. е. ее k -й отсчет $g(k) = g(k\Delta)$. Если в импульсной характеристике ЦФ ограничиться конечным числом слагаемых, получаем реализацию в виде трансверсального фильтра. При неограниченном числе компонентов $g(k)$ следует реализация в виде рекурсивного фильтра.

Синтез ЦФ по заданной частотной характеристике $K(j\omega)$ (или операторного коэффициента передачи $K(p)$)

Принципиально нельзя создать ЦФ, частотная характеристика которого $K_{цф}(\omega_{цф})$ повторяла бы частотную характеристику аналогового прототипа $K(\omega_a)$,

так как $K_{цф}(\omega_{ц})$ является периодической функцией частоты дискретизации ω_g . Однако можно потребовать, чтобы весь интервал частот ω_a , характеризующий аналоговую цепь, был преобразован в отрезок частот $\omega_{ц}$ ЦФ, на котором сохраняется форма характеристики $K(\omega_a)$, причем

$$-\frac{\omega_g}{2} < \omega_{ц} < \frac{\omega_g}{2}.$$

Если для перехода от p -плоскости (отображающей аналоговый прототип) к z -плоскости (отображающей цифровой фильтр) воспользоваться соотношениями

$$z = e^{p\Delta} \text{ или } p = \frac{1}{\Delta} \ln z, \quad (12.1)$$

то формально мы от частотной характеристики аналогового эквивалента переходим к системной функции ЦФ. Однако, если $p = \frac{1}{\Delta} \ln Z$ подставить в выражение для передаточной функции аналогового прототипа $K(p)$, которая для цепей с сосредоточенными параметрами представляет собой отношение двух полиномов от P (дробно-рациональную функцию), получим физически нереализуемую системную функцию ЦФ, так как она не выражается отношением двух полиномов от z .

Надо найти такое преобразование P в Z , которое привело бы к реализуемому фильтру, но вместе с тем сохраняло бы основное свойство преобразования (12.1), т. е. переводило бы точки мнимой оси на плоскости P (точки $j\omega$) в точки единичной окружности на z -плоскости.

Для синтеза ЦФ получило широкое распространение билинейное преобразование

$$p = \frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1}. \quad (12.2)$$

Для выяснения сущности преобразования (12.2) положим $z = e^{j\omega \Delta}$, т. е. комплексно-значные точки z лежат на единичной окружности и характеризуются аргументом (угловым сдвигом) $\omega_{ц}\Delta$. Тогда правая часть (12.2) принимает вид

$$\frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1} = -\frac{2}{\Delta} \left[\frac{1 - \cos(\omega_{ц}\Delta) - j \sin(\omega_{ц}\Delta)}{1 + \cos(\omega_{ц}\Delta) + j \sin(\omega_{ц}\Delta)} \right]. \quad (12.3)$$

Воспользовавшись формулами $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, (12.3) можно представить так:

$$\frac{2}{\Delta} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{\Delta} \operatorname{tg} \left[\frac{\omega_{ц}\Delta}{2} \right] e^{j\frac{\pi}{2}} = j \frac{2}{\Delta} \operatorname{tg} \left[\frac{\omega_{ц}\Delta}{2} \right].$$

Последнему соотношению согласно (12.2) соответствует мнимая аналоговая часть вида $j\omega_a$, следовательно,

$$\omega_a = \frac{2}{\Delta} \operatorname{tg} \left[\frac{\omega_{ц}\Delta}{2} \right]. \quad (12.4)$$

При выполнении неравенства

$$\omega_{ц}\Delta \ll 1, \quad (12.5)$$

следует, что

$$\omega_a \approx \omega_{ц}. \quad (12.6)$$

В более общем случае надо учесть изменение масштаба по оси частот ЦФ.

Учет погрешности цифровой фильтрации из-за квантования сигнала по уровням

Появление быстродействующих многоразрядных процессоров цифровой обработки сигналов самых различных типов сделало возможным производить цифровую обработку сигналов не только речи и вещания, но и телевидения. Однако даже при такой совершенной технике необходимо учитывать погрешности работы ЦФ, обусловленные квантованием уровней сигналов.

Пусть x_{\max} и x_{\min} – наибольшее и наименьшее значения уровня сигнала на выходе аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Если для квантования сигналов используется Q уровней, то при равномерном квантовании шаг квантования определяется соотношением

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{Q}.$$

Квантованные отсчеты $x_{\text{кв}}(k)$ описывают мгновенные значения аналогового дискретного сигнала $x(k)$ с определенной погрешностью (с шумом квантования): $\varepsilon(k) = x_{\text{кв}}(k) - x(k)$. Эта погрешность уменьшается (по модулю) с уменьшением Δx . Будем считать, что квантователь работает по следующим правилам: в качестве дискретного принимается уровень, ближайший к истинному. Если действительный входной уровень $x(k)$ находится в середине между дискретными номерами q и $(q+1)$, выбирается любой из них. При оговоренных условиях погрешность $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$ лежит в пределах

Чаще всего считается, что случайная погрешность $E_{\text{вх}}$ (при различных k) равномерно распределена на отрезке

$$-\frac{\Delta x}{2} < \varepsilon_{\text{вх}} < \frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда ее математическое ожидание (МО) равно нулю, а дисперсия

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \overline{E_{\text{вх}}^2} = \frac{\Delta x^2}{12}.$$

Определим погрешность работы линейного стационарного фильтра, обусловленную шумом квантования $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$. Дискретный входной отсчет ЦФ, обусловленный шумом квантования $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$ согласно (11.41) равен

$$\varepsilon_{\text{вых}}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \varepsilon_{\text{вх}}(q-k).$$

Математическое ожидание выходного шума $E_{\text{вых}} = 0$. Для нахождения диспер-

сии выходного шума $\delta_{\text{вых}}^{2\varepsilon}$ предположим, что отдельные отсчеты входного шума $E_{\text{вх}}(k)$ – независимые случайные величины с равномерным распределением и дисперсией

$$\sigma_{\text{вх}}^2(k) = \frac{\Delta x^2}{12}.$$

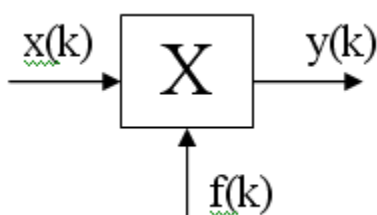
Тогда

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta x^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} g^2 k.$$

Выходной шум ЦФ, обусловленный квантованием сигнала, тем меньше, чем быстрее убывают отсчеты импульсной характеристики фильтра. Относительную погрешность ЦФ, обусловленную шумом квантования, можно определить так:

$$\delta(k) = \frac{\sigma_{\text{вых}}}{|y(k)|} = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}y^2(k)} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} g^2 k}. \quad (12.7)$$

Оценим влияние шума квантования на работу цифрового перемножителя. Из-за шума квантования квантованные отсчеты входного и опорного сигналов можно записать в виде



$$x_{\text{кв}} = x(k) + \varepsilon_x(k), \quad f_{\text{кв}}(k) = f(k) + \varepsilon_f(k).$$

Тогда

$$f_{\text{кв}}(K) \cdot x_{\text{кв}}(K) = x(K)f(K) + x(K)\varepsilon_f(K) + f(K)\varepsilon_x(K) + \varepsilon_x(K)\varepsilon_f(K).$$

Схема цифрового перемножителя

Ошибка цифрового перемножителя из-за шума квантования будет такой:

$$E_{\text{вых}}(k) = x(k)E_f(k) + f(k)E_x(x) + E_x(k)E_f(k).$$

При сделанных ранее предположениях о шуме квантования математическое ожидание $\overline{E_{\text{вых}}^2}(k)$. Предполагая шумы квантования сигналов $x(t)$ и $f(t)$ независимыми стационарными случайными процессами, получаем для дисперсии выходного шума перемножителя следующее выражение:

$$\sigma_{\text{пер}}^2 = \overline{E_{\text{вых}}^2}(k) = x^2(k)\overline{E_f^2} + f^2(k)\overline{E_x^2}E_f^2.$$

Если сигналы $x(t)$ и $f(t)$ квантуются с одинаковым шагом $\Delta_x = \Delta_t = p$, то

$$\sigma_{\text{пер}}^2 = \frac{p^2}{12} [x^2(k) + f^2(k)] \left[1 + \frac{p^2}{12(x^2(k) + f^2(k))} \right].$$

Относительная погрешность работы цифрового перемножителя, обусловленная шумом квантования, будет такой:

$$\delta_{\text{пер}} = \frac{\sigma_{\text{пер}}}{x(k)f(k)} = \left\{ \frac{p^2}{12} \frac{x^2(k) + f^2(k)}{x^2(k)f^2(k)} \left[1 + \frac{p^2}{12(x^2(k) + f^2(k))} \right] \right\}^{1/2}.$$

Выводы

1. Устройства ЦОС обладают рядом преимуществ перед устройствами обработки сигналов в непрерывном времени и широко применяются на практике в системах передачи как дискретных, так и непрерывных сообщений.
2. Наиболее широко применяются в системах связи линейные стационарные фильтры и перемножители.
3. Спектр Фурье дискретного сигнала является периодической функцией частоты дискретизации.
4. Линейчатый спектр дискретного (периодического) сигнала с числом отсчетов N определяется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Число компонентов такого спектра \hat{S}_n равно N , а число амплитуд – $N/2$. По спектральным компонентам \hat{S}_n дискретные отсчеты $x(k)$ определяются через ОДПФ.
5. Существуют методы быстрого преобразования Фурье, позволяющие существенно сократить число операций, выполняемых при расчете ЦФ спектральными методами.
6. При анализе и синтезе ЦФ широко используется Z -преобразование для получения спектральных характеристик входного и выходного сигналов и самого цифрового фильтра (его системной функции $H(z)$). Обратным Z -преобразованием определяются временные характеристики входных и выходных сигналов, а также ЦФ.
7. Частотный коэффициент передачи ЦФ определяется системной функцией фильтра при $z=e^{j\omega\Delta}$.
8. Линейные стационарные цифровые фильтры с финитной импульсной характеристикой реализуются трансверсальной схемой, а с неограниченной импульсной характеристикой – рекурсивной схемой (с обратной связью с выхода на вход).
9. Рекурсивные цифровые фильтры устойчивы, если все корни полинома знаменателя системной функции $H(z)$ лежат внутри единичного круга с центром в начале координат.
10. ЦФ часто строятся по аналоговому эквиваленту. Находят применение методы синтеза ЦФ по заданной импульсной характеристике аналогового эквивалента, по заданному дифференциальному уравнению аналогового эквивалента, по заданной частотной характеристике аналогового эквивалента.

11. Выходной шум ЦФ, обусловленный квантованием, тем меньше, чем быстрее убывают отсчеты импульсной характеристики.
12. Выходной шум цифрового перемножителя зависит как от значений отсчетов перемножаемых сигналов, так и от их цифровых компонентов.

3.3. Глоссарий (краткий словарь терминов)

Автогенератор – устройство, вырабатывающее колебания при отсутствии внешнего воздействия.

Автокорреляционная функция – функция, определяющая связь между сигналом и его копией, сдвинутой во времени на интервал τ .

Безынерционность – мгновенное установление выходной реакции вслед за изменением внешнего входного воздействия.

Белый шум – стационарный случайный процесс с постоянной на всех частотах спектральной плотностью мощности $W(\omega)=W_0=\text{const}$.

БПФ – быстрое преобразование Фурье.

Видеоимпульс – импульс без высокочастотного заполнения.

Девиация частоты – амплитуда, максимальное отклонение частоты от среднего значения.

Дельта функция – функция, равная нулю всюду, за исключением точки $t=0$, где она обращается в бесконечность.

Детектирование – процесс выделения низкочастотной информационной составляющей из высокочастотного модулированного сигнала.

Дисперсия – среднеквадратическое отклонение случайной величины от среднего значения.

Импульсная характеристика – отклик цепи на воздействие дельта-функции.

Индекс модуляции – амплитуда, максимальное отклонение фазы от среднего значения.

Математическое ожидание – среднее значение случайной величины.

Модуляция – процесс изменения одного из параметров высокочастотного гармонического колебания (амплитуды, частоты, фазы) под воздействием низкочастотного (информационного) сигнала.

Найквиста критерий – критерий устойчивости четырехполюсника при однопетлевой обратной связи.

Обратная связь – передача сигнала с выхода четырехполюсника на его вход.

Передаточная функция – отношение сигнала на выходе четырехполюсника к его входному сигналу.

Переходная характеристика – отклик цепи на единичную функцию.

Радиоимпульс – импульс с высокочастотным заполнением.

Сигнал – физический процесс, несущий в себе информацию.

Угол отсечки – половина интервала времени протекания тока через нелинейный элемент, выраженного в угловых единицах.

Частотный коэффициент передачи – зависимость коэффициента передачи четырехполюсника от частоты.

3.4. Технические и программные средства обеспечения дисциплины

3.4.1. Описание компьютерных программ по разделам дисциплины

1. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 7-9.
2. Программа схемотехнического моделирования и проектирования печатных плат OrCAD 9-10.

3.4.2. Описание автоматизированной обучающей программы

Специализированная обучающая программа SpectrAn.exe.

3.5. Методические указания к выполнению лабораторных работ

“Методические указания к выполнению лабораторных работ” включены в дополнительный том [10].

3.6. Методические указания к проведению практических занятий

“Методические указания к проведению практических занятий” включены в дополнительный том [10].

4. Блок контроля освоения дисциплины

4.1. Общие указания

Блок контроля освоения дисциплины включает.

1. Задания на контрольную работу и методические указания к ее выполнению

В первом семестре студенты выполняют одну контрольную работу, задания на которую и методические указания к ее выполнению приведены в разделе 4.2.

2. Задания на курсовую работу и методические указания к ее выполнению

Во втором семестре студенты выполняют курсовую работу, задания на которую и методические указания к ее выполнению приведены в разделе 4.3.

3. Текущий контроль

В разделе 4.4 приводятся 12 тестов текущего контроля, каждый из которых соответствует своему разделу дисциплины. Они предлагаются студентам в качестве тренировочных (репетиционных). После работы с этими тестами можно проверить ответы – они приведены на с. 217-218. Тренировочные тесты являются подготовкой к контрольным тестам.

4. Итоговый контроль

Первый семестр завершается сдачей зачета, а второй – сдачей экзамена. При этом студенты сдают зачет и экзамен по билетам. В разделе 4.5 приводятся вопросы для подготовки к зачету и экзамену.

4.2. Задание на контрольную работу и методические указания к ее выполнению

1. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1.1. ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Выполнение контрольной работы способствует приобретению практических навыков решения радиотехнических задач, связанных с конструированием различных устройств, а также для закрепления полученных теоретических знаний. Контрольная работа включает в себя решения трёх задач по основным разделам курса.

Варианты задач приведены в табл. 1, 2, 3.

Номер варианта определяется по двум последним цифрам шифра, имеющегося в зачётной книжке студента.

Задача 1

Заданы одиночные (непериодические) сигналы различной формы. Исходные данные для расчёта приведены в табл. 1 и 2.

Требуется:

1. Вывести выражение для модуля спектральной плотности сигнала и сравнить результат с табличным значением.

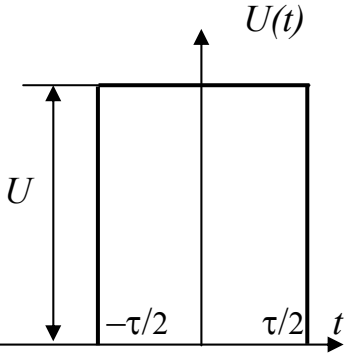
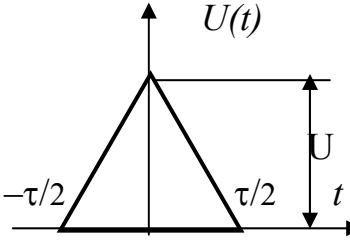
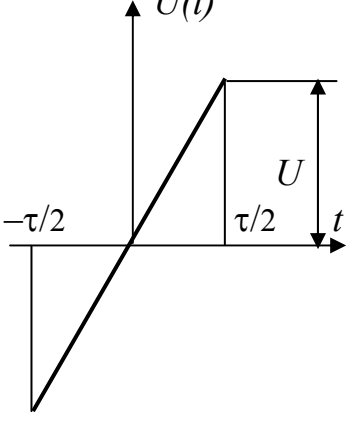
2. Вычислить модуль спектральной плотности сигнала с обязательным вы-

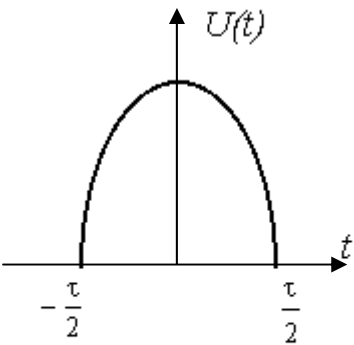
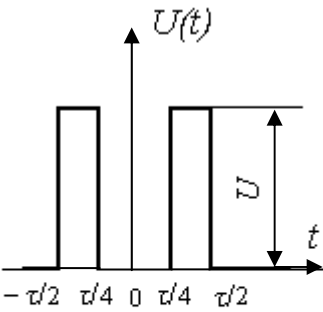
числением характерных точек (т. е. тех точек, где значения модуля спектральной плотности имеют максимальные значения и равны нулю).

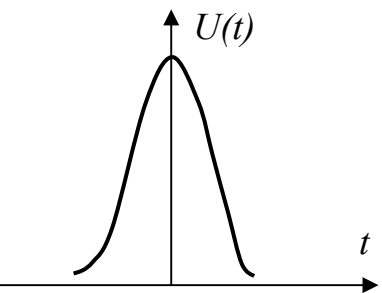
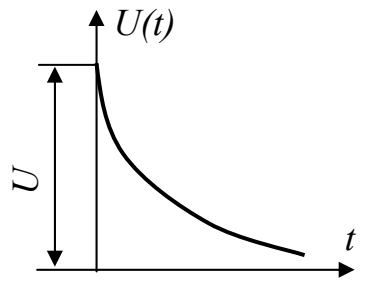
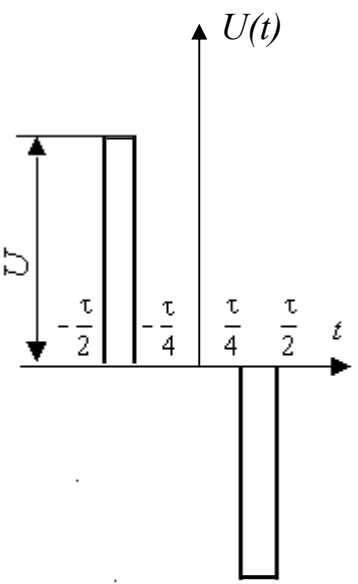
3. Построить график модуля спектральной плотности как функции частоты.

Таблица 1

Последняя цифра шифра	Вид сигнала	Аналитическое задание временной функции сигнала	Модуль спектральной плотности
0		$u(t) = U$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq 0$;</p> <hr/> $u(t) = -U$ <p>при $0 \leq t \leq \tau/2$</p>	$U \tau \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{4}}{\frac{\omega \tau}{4}}$
1		$u(t) = U \sin \pi \frac{2t}{\tau}$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$;</p> <hr/> $u(t) = 0$ <p>при $-\tau/2 > t > \tau/2$</p>	$U \tau 4 \pi \frac{\left \sin \omega \frac{\tau}{2} \right }{4 \pi^2 - \omega^2 \tau^2}$

2		$u(t) = U$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$;</p>	$U \tau \left \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \right $
		$u(t) = 0$ <p>при $-\tau/2 > t > \tau/2$</p>	
3		$u(t) = \frac{2U}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{2} \right)$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq 0$;</p>	$\frac{U \tau}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau}{4}}{\frac{\omega \tau}{4}} \right)^2$
		$u(t) = \frac{2U}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} - t \right)$ <p>при $0 \leq t \leq \tau/2$;</p>	
		$u(t) = 0$ <p>при $\tau/2 < t < -\tau/2$</p>	
4		$u(t) = \frac{2U}{\tau} t$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$;</p>	$U \tau \left \frac{\cos \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} - \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega \tau}{2} \right)^2} \right $
		$u(t) = 0$ <p>при $-\tau/2 > t > \tau/2$</p>	

<p>5</p>		$u(t) = U \cos \pi \frac{t}{\tau}$ <p>при $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$;</p> $u(t) = 0$ <p>при $\tau/2 < t < -\tau/2$</p>	$\frac{U \pi \tau}{2} \cdot \frac{\left \cos \frac{\omega \tau}{2} \right }{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)^2}$
<p>6</p>		$u(t) = U$ <p>при $\frac{\tau}{4} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$,</p> $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq -\frac{\tau}{4}$ <hr/> $u(t) = 0$ <p>при $-\frac{\tau}{2} > t > \frac{\tau}{2}$,</p> $\frac{\tau}{4} > t > -\frac{\tau}{4}$	$\frac{U \tau}{2} \left \frac{\sin \omega \frac{\tau}{8}}{\frac{\omega \tau}{8}} \times \cos \omega \tau \right $

7		$u(t) = u e^{-\alpha t^2}$	$U \sqrt{\pi/\alpha} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
8		$u(t) = U e^{-\alpha t}$ при $t > 0$;	$\frac{U}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$
$u(t) = 0 \text{ при } t < 0$			
9		$u(t) = U$ при $-\tau/2 \leq t \leq -\tau/4$;	$\frac{U\tau}{2} \left \frac{\sin \frac{\omega\tau}{8}}{\frac{\omega\tau}{8}} \times \sin \frac{3\omega\tau}{8} \right $
$u(t) = 0$ при $-\tau/4 < t < \tau/4$;			
$u(t) = -U$ при $\tau/4 \leq t \leq \tau/2$			

4. По графику модуля спектральной плотности определить ширину спектра

видеоимпульса для уровня 0,1 от максимального значения модуля спектральной плотности.

Таблица 2

Предпоследняя цифра шифра	Максимальное напряжение сигнала U , В	$\alpha \times 10^3$, $\frac{1}{c}$	Длительность сигнала, мкс
0	10	45	100
1	20	40	90
2	30	35	80
3	40	30	70
4	50	25	60
5	60	25	50
6	70	20	40
7	80	15	30
8	90	10	20
9	100	5	10

Задача 2

Задан сигнал. Исходные данные для расчёта такие же, как и в задаче 1.

Требуется:

1. Вычислить автокорреляционную функцию.
2. Построить график автокорреляционной функции.
3. Определить время корреляции.

Задача 3

Задано математическое выражение модулирующего (управляющего) колебания в виде суммы двух гармонических колебаний:

$$e(t) = E \cos \Omega t - \frac{1}{3} E \cos 3 \Omega t ,$$

где $\Omega = 2\pi F$.

Значения коэффициента модуляции m , амплитуды u и частоты f несущего колебания, частоты моделирующего колебания приведены в табл. 3.

Требуется:

1. Написать математическое выражение амплитудно-модулированного сигнала.
2. Построить график спектра амплитуд.
3. Определить ширину спектра АМ-сигнала.
4. Определить распределение мощности по спектральным составляющим.
5. Построить векторную диаграмму.

Таблица 3

Последняя цифра шифра	Амплитуда высоко-частотного колебания u , В	Частота высоко-частотного колебания f , кГц	Частота частотного колебания F , кГц	Коэффициент модуляции m
0	1	100	1	1
1	2	200	2	0,9
2	3	300	3	0,8
3	4	400	4	0,7
4	5	500	5	0,6
5	6	400	6	0,5
6	7	300	5	0,6
7	8	200	4	0,7
8	9	100	3	0,8
9	10	100	2	0,9

1.2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1

Для нахождения спектральной плотности сигналов, представляющих собой производную или интеграл от импульса, спектр которого известен, последний достаточно соответственно умножить или разделить на $j\omega$. При этом необходимо учесть масштаб функции прототипа. Следует помнить, что применение этих операций возможно лишь к импульсам, во всём временном интервале которых существует конечное значение производной.

Фаза спектральной плотности при этом изменится на величину $\pm \frac{\pi}{2}$ (величина j в фазовом изображении представляет собой угол в 90°).

При определении амплитуд гармоник ряда Фурье следует помнить, что они могут быть получены умножением модуля спектральной плотности на частоте соответствующей гармоники на величину $T/2$.

Если функция импульса чётная, то ряд Фурье представляет собой разложение только по косинусоидальным составляющим; для нечётной функции импульса – по синусоидальным составляющим, а постоянная составляющая равна нулю.

При решении задачи следует использовать литературу [7, гл. 2], [2, § 2,2] и [9, § 1,3], где приведены теоретические материалы и примеры решения аналогичных задач. Студенты, использующие ДОТ, могут найти указанную литературу с помощью поисковых систем интернета, например на сайте www.knigka.info.

Задача 2

Кроме спектрального анализа радиотехнических сигналов, широкое применение находит корреляционный, который основан на исследовании временной связи двух сигналов, задержанных по времени относительно друг друга на переменную величину. Следует помнить, что при взаимодействии двух одинаковых сигналов функция называется автокорреляционной, а при взаимодействии двух разных – функцией взаимной корреляции. В результате решения задачи следует построить график корреляционной функции, по которому следует определить время корреляции, которое характеризует длительность сигналов. Методика вычисления автокорреляционной функции приведена в [7, § 2.18], [2, § 3.2] и [9, § 1.15].

Задача 3

Для решения задачи следует для заданной модулирующей функции записать выражение для высокочастотного модулированного колебания согласно заданию. При определении парциальных составляющих амплитудно-модулированных ко-

лебаний следует привести эти колебания к сумме гармонических составляющих методом преобразования произведения синусов или косинусов в сумму (или разность). При построении спектральной диаграммы следует по оси абсцисс откладывать частоты составляющих сигнала, а по вертикали – амплитуды составляющих, найденные при решении задачи.

При решении задачи следует воспользоваться материалом, изложенным в [7, § 3.2, 3.3].

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется в тетради, на обложке которой разборчиво указаны наименование дисциплины, шифр, фамилия, имя и отчество студента.

2. Условие задачи переписывается полностью без сокращения.

3. Текст, формулы и численные вычисления пишутся чётко и аккуратно. На каждой странице оставляются поля шириной $3 \div 4$ см для замечаний преподавателя.

4. Буквенные обозначения физических величин и их параметров должны соответствовать Международной системе единиц СИ.

5. Все исправления в работе после рецензирования преподавателем приводятся в этой же тетради в разделе “Работа над ошибками”. Контрольная работа, не удовлетворяющая изложенным требованиям, к рецензированию не принимается.

6. Студенты, использующие ДОТ, могут оформить контрольную работу на персональном компьютере и прикрепить на учебный сайт СЗТУ в системе MOODLE или выслать ее преподавателю для рецензирования на адрес электронной почты кафедры: radiotech@nwpi.ru.

4.3. Задание на курсовую работу и методические указания к ее выполнению

1. КУРСОВАЯ РАБОТА

1.1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Курсовая работа по дисциплине “Радиотехнические цепи и сигналы” выполняется студентами по специальности 210302.65 – радиотехника.

В соответствии с учебным планом выполнение курсовой работы и её защита осуществляются во второй части дисциплины.

Тема курсовой работы: «Синтез и анализ активных фильтров I-го и II-го порядков».

Задача курсовой работы – практическое освоение методов расчёта радиоэлектронных схем активных фильтров на современной элементной базе и анализ прохождения сигналов через них с применением ЭВМ.

Рассчитать активные фильтры I-го и II-го порядков, имеющие заданные параметры:

- максимальный коэффициент усиления по напряжению K_u ;
- граничную частоту $f_{гр}$ (либо центральную частоту f_0 и полосу пропускания $2 \Delta f_n$, либо две граничные частоты $f_{гр\text{ м}}$ и $f_{гр\text{ в}}$ – в зависимости от варианта) и проанализировать прохождение через него идеального прямоугольного импульса длительностью τ_u .

Схема фильтра определяется предпоследней цифрой шифра табл. 6 (рис. 1, а, б, в, г, д, е, ж, з). Последняя цифра шифра в табл. 5 определяет параметры фильтра.

1. Используя схему замещения идеального ОУ, составить и начертить эквивалентную схему рассчитываемой цепи по переменному току.

2. Найти комплексный коэффициент передачи по напряжению $K_u(j\omega)$ двумя способами: составив и решив систему уравнений электрического равновесия и руководствуясь принципом виртуального замыкания.

3. На основании данных табл. 4 подобрать тип операционного усилителя, подходящий для реализации требуемых характеристик схемы.

4. Рассчитать номиналы элементов, позволяющих реализовать заданные в табл. 5 параметры активного фильтра.

5. Рассчитать модуль и фазу коэффициента передачи $K_u(j\omega)$ (АХЧ и ФХЧ) активного фильтра в зависимости от частоты. Построить графики.

6. Записать выражение для коэффициента передачи $K_u(P)$, используя кото-

рое с помощью теоремы разложения рассчитать переходную характеристику цепи и построить её график.

7. Используя результаты анализа в п. 6, рассчитать и изобразить на графике форму импульса на выходе фильтра при идеальном прямоугольном видеоимпульсе длительностью τ_u на входе. Пояснить, какими особенностями АХЧ обусловливается вид импульса на выходе. Определить время нарастания фронта, время спада импульса или декремент затухания (при колебательном характере отклика).

8. Изобразить на графике функцию спектральной плотности $S_1(\omega)$ идеального прямоугольного видеоимпульса на входе активного фильтра и функцию спектральной плотности отклика $S_2(\omega)$ на выходе.

9. Используя параметры реального ОУ, взятые из табл. 4, составить задание для расчёта коэффициента передачи схемы на ЭВМ. По данным расчёта построить графики АХЧ, ФХЧ. Сравнить графики АХЧ и ФХЧ с рассчитанными в п. 5.

10. Ориентируясь на выбранный ОУ, изобразить полную принципиальную схему рассчитанного активного фильтра, показав на ней цепи питания и фазовой коррекции.

Таблица 4

Тип ОУ	Параметры ОУ				
	K	f_B , кГц	f_1 , МГц	$R_{вх.}$, кОм	$R_{вых.}$, кОм
К140УД5	400	35	14	50	1
К140УД6	30000	35	1	1000	0,2
К140УД7	50000	20	0,8	400	0,2
К140УД8	50000	20	1	1	0,2
К140УД10	50000	300	15	1000	0,2
К140УД12	200000	1,5	0,3	5000	1
К284УД1	20000	100	0,5	5000	0,2
К284УД2	5000	100	0,5	200000	0,01
К544 УД2	150000	100	15	10000	0,2
К553УД1	15000	65	1	200	0,15

Таблица 5

Параметры	Последняя цифра шифра										Примечание
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$ K_u $, дБ	15	60	20	55	26	50	32	45	40	20	
f_{cp} , кГц	1000	20	800	30	400	40	100	60	80	900	кроме схем а, г, д, з
f_0 , кГц	300	10	250	15	150	25	45	25	40	200	для схем а, г
$2\Delta f_n$, кГц	30	4	30	4	10	1	5	5	5	20	для схем ж, г
$f_{гр.н}$, кГц	100	3	100	5	30	15	15	10	20	70	для схем д, з
$f_{гр.в}$, кГц	400	15	450	25	200	55	75	40	80	300	для схем д, з
$\tau_{и}$, мкс	5	200	10	150	10	50	30	50	40	10	

Таблица 6

Предпоследняя цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Схема рисунка	а	б	в	г	д	е	ж	з	а	б

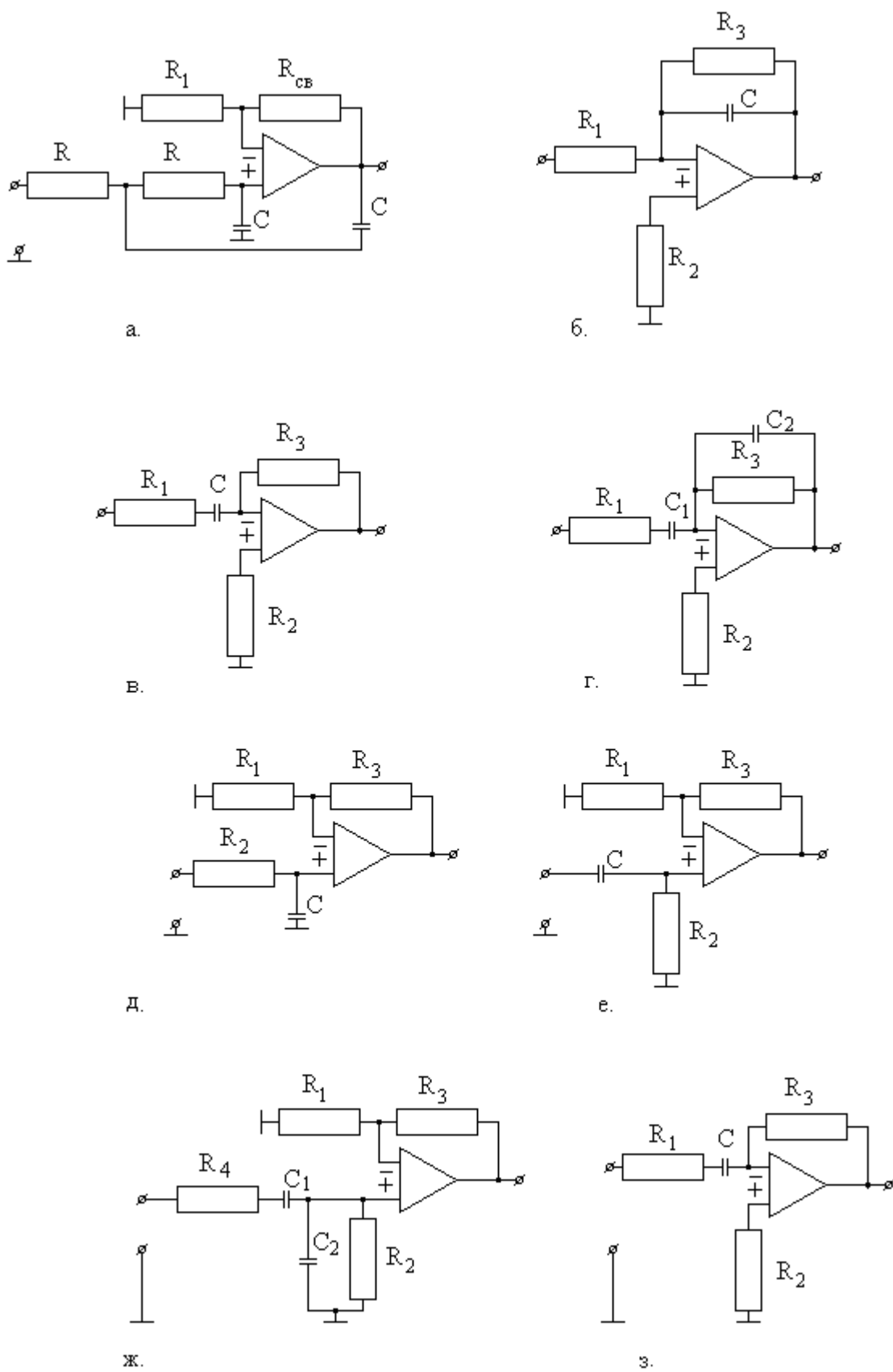


Рис. 1

1.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Активные фильтры построены из резисторов, конденсаторов и усилителей (обычно операционных) и предназначены для того, чтобы из всех подаваемых на их вход сигналов пропускать на выход сигналы лишь некоторых заранее заданных частот. Эти обладающие частотной избирательностью схемы используются для усиления или ослабления определенных частот в звуковой аппаратуре, в генераторах электромузыкальных инструментов, в сейсмических приборах, в линиях связи и т. п.

Фильтр нижних частот пропускает на выход все частоты, начиная от нулевой (постоянный ток) и до некоторой заданной частоты среза f_{cp} , и ослабляют все частоты, превышающие f_{cp} , частотная характеристика такого фильтра показана на рис. 2, а.

Диапазон частот, начинающийся от нуля до f_{cp} , называется полосой пропускания, а диапазон частот, превышающий f_{cp} , – полосой подавления (или заграждения). Интервал частот между f_{cp} и f_{cpB} называется переходным участком. Частота среза f_{cp} – это частота, при которой напряжение на выходе фильтра падает до уровня 0,707 от напряжения в полосе пропускания (т.е. падает на 3 дБ), частота f_{cpB} – это частота, при которой выходное напряжение на 3 дБ выше, чем выходное напряжение в полосе подавления.

Фильтр верхних частот ослабляет все частоты, начиная с нулевой и до частоты f_{cp} , и пропускает все частоты, начиная с f_{cp} и до верхнего частотного предела схемы (рис. 2, б).

Полосовой фильтр пропускает, как показано на рис. 2, в, все частоты в полосе между нижней частотой среза f_{cpH} и верхней частотой среза f_{cpB} . Все частоты ниже f_{cpH} и выше f_{cpB} ослабляются. Диапазон частот от f'_{cpH} до f_{cpH} и от f_{cpB} до f'_{cpB} являются переходными участками.

Геометрическое среднее частот f_{cpH} и f_{cpB} называется средней центральной частотой f_0 , т. е. $f_0 = \sqrt{f_{cpH} f_{cpB}}$.

2. Синтез фильтра начинается с аппроксимации его АЧХ соответствующими функциями. Наиболее употребительной является аппроксимация полиномами Чебышева:

$$\left| \dot{K}(\omega) \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}} \quad (1)$$

и Баттерворта:

$$\left| \dot{K}(\omega) \right| = \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \quad (2)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ определяет порядок фильтра.

Характеристики фильтров Чебышева обладают максимальной крутизной, но значительной неравномерностью АЧХ; характеристики фильтров Баттерворта равномерны в полосе частот пропускания, однако крутизна среза невелика.

3. По сравнению с пассивными активные фильтры имеют следующие преимущества:

- в них используются только сопротивления и конденсаторы, т.е. компоненты, свойства которых ближе к идеальным, чем свойства катушек индуктивности;
- они относительно дешёвы;
- они могут обеспечивать усиление в полосе пропускания и (в отличие от пассивных фильтров) редко вносят существенные потери;
- использование в активных фильтрах операционных усилителей обеспечивает развязку входа от выхода;
- активные фильтры относительно легко настраивать;
- активные фильтры невелики по размерам и массе.

Активные фильтры имеют и недостатки. Они нуждаются в источниках питания, а их рабочий диапазон частот ограничен сверху максимальной рабочей частотой операционного усилителя.

4. Коэффициент затухания α определяет форму характеристики на переходном участке и вид выбросов характеристики в полосе пропускания вблизи переходного участка.

5. Добротность Θ связывает среднюю частоту полосы пропускания и её ширину на уровне 3 дБ. Численно добротность равна

$$\Theta = f_0 / (f_{2pH} - f_{2pB}) = \sqrt{f_{2pH} f_{2pB}} / (f_{2pB} - f_{2pH}), \quad (3)$$

где $f_0 = \sqrt{f_{2pH} f_{2pB}}$ – средняя частота;
 f_{2pH} – нижняя частота среза на уровне 3 дБ;
 f_{2pB} – верхняя частота среза на уровне 3 дБ.

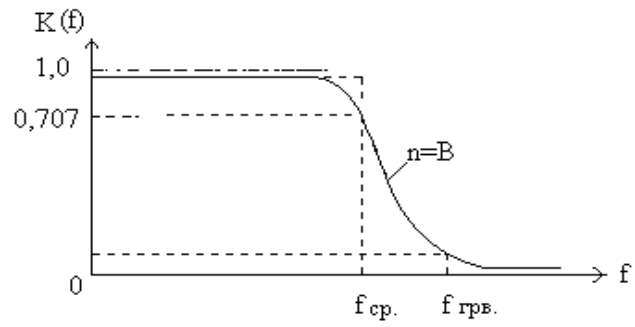
Для активных фильтров $\Theta = 1/\alpha$.

6. Схемы активных фильтров нижних частот с параллельной обратной связью второго порядка показаны на рис. 3, 4. На рис. 5 показана схема фильтра верхних частот.

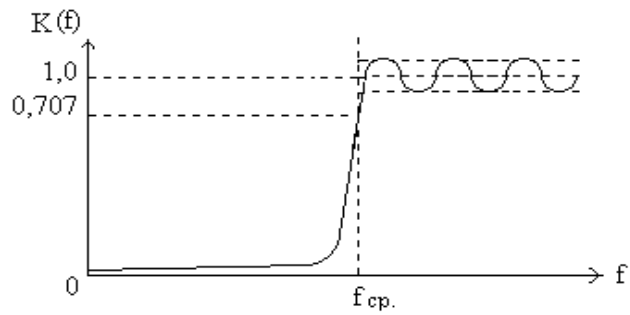
Эти схемы популярны и недороги, их легко настраивать. В обеих схемах каждая из RC – цепей вносит 6 дБ/Октаву в наклон характеристики на переходном участке. Эти схемы содержат по две RC – цепи (R_1C_1 и R_2C_2), поэтому соответствующие фильтры имеют второй порядок. В фильтре нижних частот цепи R_1C_1 и R_2C_2 являются интегрирующими, а в фильтре верхних частот – дифференцирующими. Сопротивления R_A и R_B определяют коэффициент затухания. Характеристика вблизи края полосы пропускания формируется за счет обратной связи, которая осуществляется через конденсатор C_1 в случае фильтра нижних частот или через сопротивление R_1 в случае фильтра верхних частот. Если $R_1 = R_2$ и $C_1 = C_2$, то величины компонентов таких фильтров можно рассчитать.

7. Фильтр с параллельной обратной связью – это простой полосовой фильтр, хорошо работающий при низких и умеренных (примерно до 10) значениях добротности; его схема показана на рис. 6.

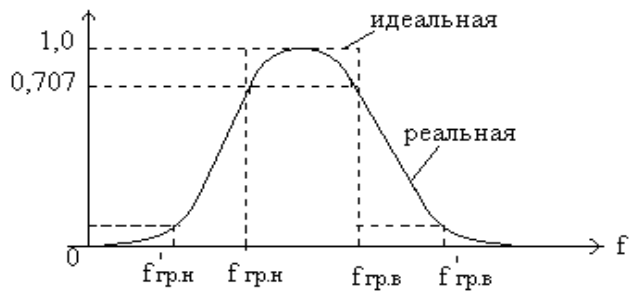
Обратная связь в этой схеме осуществляется одновременно через включенные параллельно R_3 и C_1 . Часть характеристики, соответствующая фильтру нижних частот, формируется с помощью цепи R_1 и C_1 , а часть, соответствующая фильтру верхних частот, – с помощью цепи R_3 и C_2 . Такая обратная связь обеспечивает положение максимума характеристики вблизи частоты f_0 . Сопротивление R_2 можно убрать, но в этом случае изменится процедура вычисления величин компонентов схемы. Сопротивление R_2 служит для увеличения $R_{вх}$ и обеспечивает возможность задавать коэффициент усиления в полосе пропускания.



а) амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта нижних частот 6-го порядка



б) амплитудно-частотная характеристика фильтра Чебышева верхних частот 6-го порядка



в) полосовой фильтр

Рис. 2

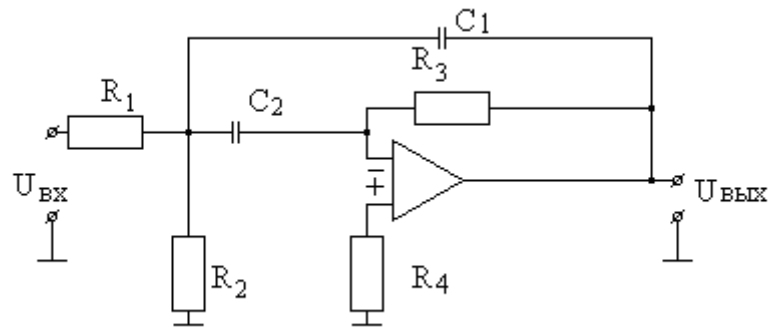


Рис. 3

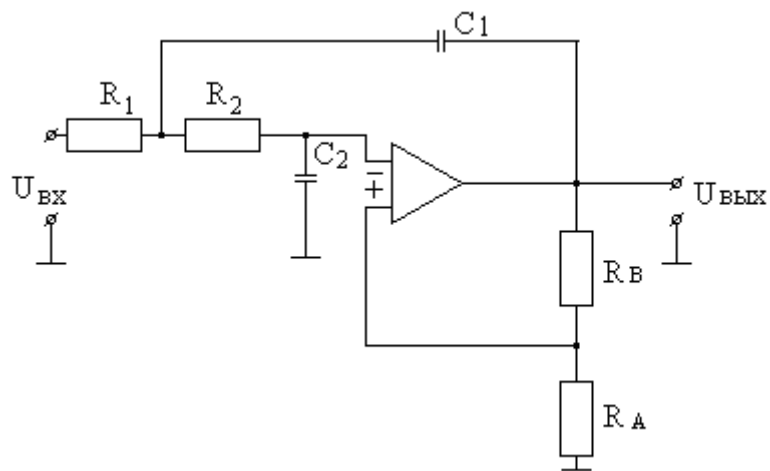


Рис. 4

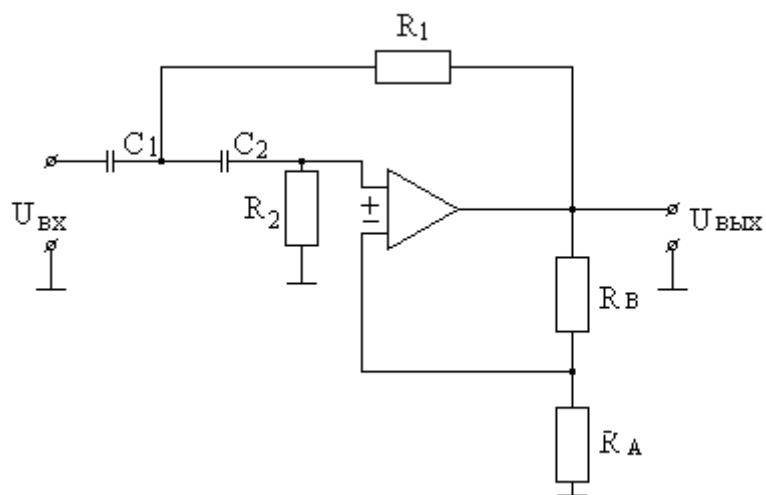


Рис. 5

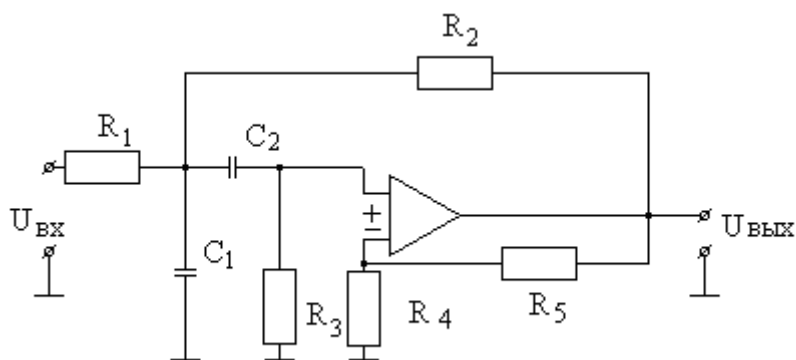


Рис. 6

1.3. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

Вариант схемы активного фильтра для расчёта выбирается студентом по предпоследней цифре личного шифра согласно табл. 6. По табл. 5 в соответствии с последней цифрой шифра выбираются численные значения параметров рассчитываемой схемы. Все предлагаемые для анализа схемы по виду АЧХ можно разделить на 4 типа: фильтры нижних частот; фильтры верхних частот; полосовые фильтры и узкополосные фильтры.

Студент должен самостоятельно определить, к какому типу относится рассчитываемая им схема.

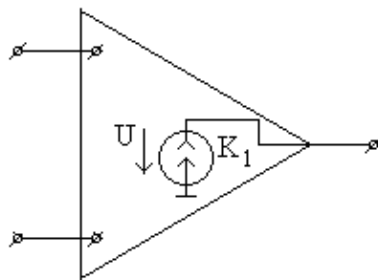
Расчёт активного фильтра начинается с составления эквивалентной схемы цепи по переменному току. Для этого используется схема замещения ОУ, приведённая на рис. 7 (подробнее об ОУ [7, гл.10]; [8, раздел 14.3]).

При этом используется понятие об идеальном операционном усилителе, с той лишь разницей, что K_0 считается конечной, хотя и большой величиной.

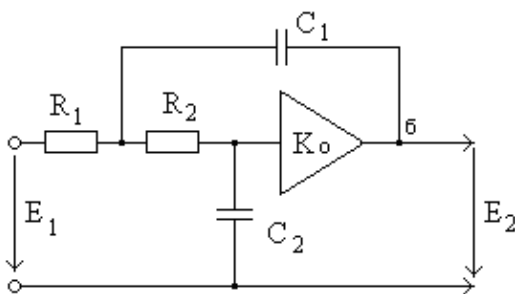
Расчёт комплексного коэффициента передачи можно произвести, используя, например, метод контурных токов или любой другой метод [8, гл. 4] для составления уравнений электрического равновесия (рис. 8, 9).

Приближённую формулу для комплексного коэффициента передачи можно получить также с помощью принципа виртуального замыкания. Суть этого принципа состоит в том, что при качественном анализе радиоэлектронных цепей, содержащих ОУ, разность напряжений на дифференциальных входах усилителей и их входные токи полагаются равными нулю. Виртуальное замыкание не является реальным физическим замыканием, при котором по замкнутому участку цепи может протекать любой ток при нулевом напряжении. Ситуация, описываемая принципом виртуального замыкания, физически нереализуема, что является следствием последовательного использования понятия идеального операционного усилителя ($R_{вх} = \infty$, $K_0 = \infty$, $R_{вых} = 0$). Дело в том, что идеальный операционный усилитель за счёт бесконечно большого собственного коэффициента усиления K_0 и выходного сопротивления, равного нулю, развивает конечное напряже-

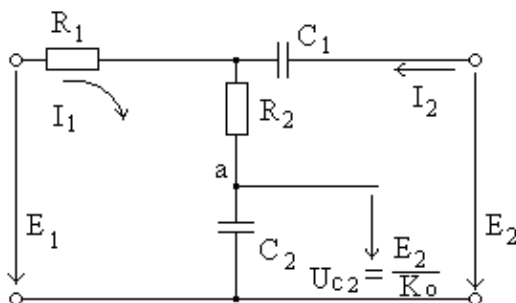
ние на любой, отличной от нуля, нагрузке при нулевом входном напряжении. Этот принцип моделирует процессы, протекающие в реальных цепях, ровно в той же мере, в какой модель идеального ОУ соответствует физическому объекту, именуемому “операционный усилитель”. Поскольку эта модель груба, принцип виртуального замыкания, значительно упрощающий расчёты, используется лишь для качественного оперативного анализа радиоэлектронных схем с ОУ. Точность, обеспечиваемая принципом виртуального замыкания, достаточна для целей данной курсовой работы. Примеры использования принципа виртуального замыкания приведены в [7, с. 243-248].



а)



б) активная RC-цепь второго порядка



в) схема замещения

Рис. 7

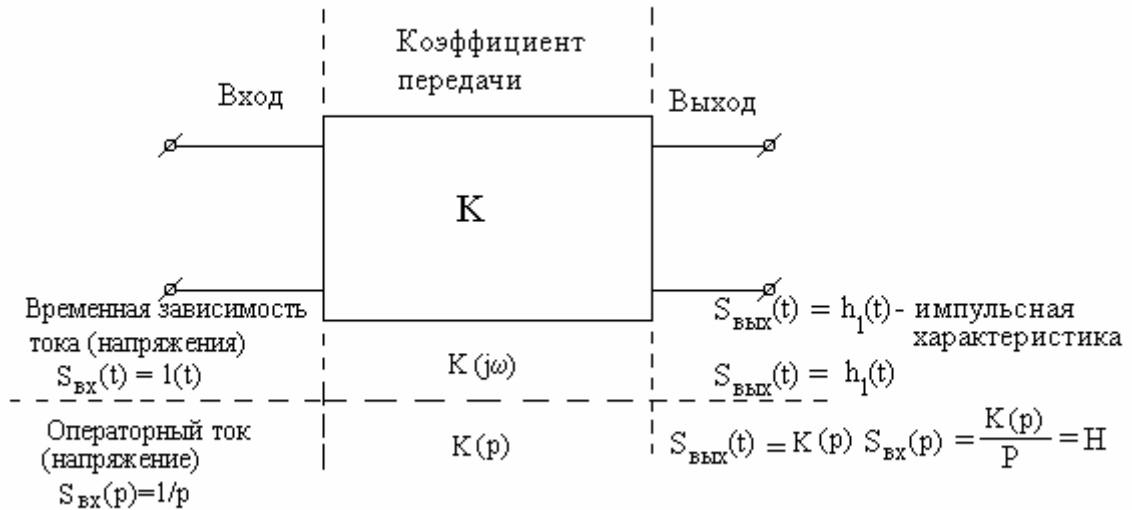


Рис. 8

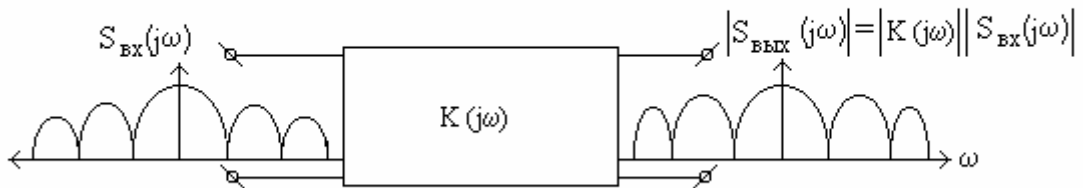


Рис. 9

В курсовой работе предлагается получить выражение для коэффициента передачи $K(j\omega)$ как с помощью одного из универсальных методов анализа, так и с использованием принципа виртуального замыкания (п. 2).

После того, как будут получены выражения для $K(j\omega)$ в обоих случаях, положите в первом варианте $K_0 \rightarrow \infty$, упростите выражение и сравните результаты.

Выбор типа операционного усилителя на практике может быть обусловлен самыми различными соображениями: теми или иными радиотехническими параметрами (предельной частотой, коэффициентом усиления, напряжением питания и т. п.), стоимостью, вибростойкостью, габаритами, способностью работать при пониженных или повышенных температурах и т. п. В курсовой работе необходимо руководствоваться возможностью удовлетворить требованиям задания по частоте и по коэффициенту усиления, не забывая при этом об экономичности, т. е. о том, что более высокочастотные ОУ, как правило, и более дорогие.

При выполнении п. 4 задания необходимо по заданным характеристикам

фильтра и выражению для комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ рассчитать значения величин элементов, составляющих схему. Например, в случае полосового фильтра (задаются $K_{u\max}, f_{2pH}, f_{2pB}$) расчёты можно производить по следующей схеме.

Сначала определяем экстремум $K(j\omega)$. Продифференцировав $K(j\omega)$ по ω и приравняв результат к нулю, из уравнения

$$\frac{d|K(j\omega)|}{d\omega} = 0$$

найдем значение частоты $\omega = \omega_0$, при котором функция $K(j\omega)$ имеет максимум $K(j\omega) = K_{u\max}$.

Очевидно, должно выполняться условие

$$2\pi f_{2pH} < \omega < 2\pi f_{2pB}.$$

Таким образом, мы имеем три уравнения:

$$\frac{|K(j\omega_0)|}{K_{u\max}} = 1, \quad \frac{|K(j\omega_{2pH})|}{K_{u\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{|K(j\omega_{2pB})|}{K_{u\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

из которых можно найти необходимые значения величин элементов рассчитываемой схемы.

Расчёт АЧХ и ФЧХ (п. 5 задания) традиционен и не требует дополнительных пояснений.

Важными характеристиками радиотехнических систем и устройств являются переходная и импульсная характеристики, которые показывают степень искажения импульсов, проходящих через систему или устройство, и, следовательно, позволяют определить степень искажений сигналов (п. 6 задания).

В данной работе предлагается рассчитать форму импульса на выходе, если на вход подается идеальный прямоугольный видеоимпульс. Сделать этот расчёт можно различными способами, например по переходной (операторный метод) или по амплитудно-частотной (частотный метод) характеристикам цепи.

В первом случае идеальный прямоугольный видеоимпульс можно представить как разность двух функций Хевисайда (единичных ступенек):

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I & t \geq 0 \end{cases} \quad S_{\text{ВХ}}(t) = A [I(t) - I(t - T)], \quad (5)$$

где T – длительность видеоимпульса;

A – его амплитуда.

Тогда, в силу того, что заданная радиоэлектронная цепь рассматривается в линейном режиме, справедлив принцип суперпозиции, и, следовательно, отклик цепи на внешнее воздействие в форме идеального прямоугольного видеоимпульса можно рассматривать как разность откликов цепи на воздействия в виде двух функций Хевисайда $I(t)$ и $I(t - T)$.

Известно, что отклик цепи на внешнее воздействие в виде единичной ступени (функции Хевисайда) есть переходная характеристика этой цепи. Следовательно, отклик цепи на прямоугольный видеоимпульс пропорционален разности переходных характеристик, взятых в моменты $t = 0$ и $t = T$:

$$S_{\text{ВЫХ}}^{(t)} = A [h_1(t) - h_1(t - T)]. \quad (6)$$

Таким образом, для расчёта отклика цепи на прямоугольный видеоимпульс необходимо прежде всего определить ее переходную характеристику. Для этого сначала нужно рассчитать операторное изображение переходной характеристики (о преобразовании Лапласа и его использовании для анализа радиоэлектронных цепей см. [8, разделы 2.4; 2.5; 3.5; 5.4 гл. 6]).

Как известно, переходная характеристика есть отклик цепи на внешнее воздействие в форме единичного скачка напряжения (тока). Рассмотрим некоторую цепь как четырёхполюсник (рис.8) с коэффициентом передачи K .

Пусть на вход этой цепи поступает входной сигнал в виде единичной ступеньки. Тогда форма сигнала на выходе и представляет собой переходную характеристику. В терминах операционного исчисления аналогичное рассуждение приводит к важным выводам. Изображением по Лапласу функции Хевисайда является

$\frac{I}{p}$. Следовательно, на входе рассматриваемого четырёхполюсника действует

операторный сигнал $\frac{I}{p}$. Если операторный коэффициент передачи четырёхполюсника $K(P)$, то на выходе в результате внешнего воздействия появится операторный сигнал

$$S_{\text{ВЫХ}}(P) = K(P) \cdot S_{\text{ВЫХ}}(P) = \frac{K(P)}{P},$$

который представляет собой изображение по Лапласу переходной характеристики.

Таким образом, чтобы найти переходную характеристику, надо найти ориги-

нал изображения $\frac{K(P)}{P}$. Изображение $\frac{K(P)}{P}$ практически известно, так как $K(P)$ очень легко найти из $K(j\omega)$ [7, раздел 3.5]. Для отыскания оригинала можно воспользоваться либо таблицами преобразования Лапласа [7, с. 90], либо теоремой разложения. Теорема разложения формулируется следующим образом:

если изображение сигнала по Лапласу имеет вид $S(P) = \frac{M(P)}{N(P)}$,

где $M(P)$ и $N(P)$ – полиномы степени m и n по P соответственно, причём $m < n$ и в множестве корней P_k уравнения $N(P) = 0$ нет кратных, оригинал $S(P)$ выражается формулой

$$S(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(P_k)}{\left. \frac{dN(P)}{dP} \right|_{P=P_k}} e^{P_k t}. \quad (7)$$

После получения переходной характеристики $K(P)$ необходимо рассчитать вид прямоугольного видеоимпульса по формуле (7) и изобразить входной и выходной импульсы на одном графике.

Другой метод расчёта формы прошедших через радиоэлектронную цепь сигналов обычно называют частотным методом, так как в нём используются методы анализа сигналов и цепей в частотной области.

Пусть, например, на вход четырёхполюсника поступает сигнал, который характеризуется функцией спектральной плотности $S_{\text{вх}}(j\omega)$. Комплексный коэффициент передачи четырёхполюсника $K(j\omega)$ известен. Тогда, очевидно, спектральная плотность выходного сигнала $S_{\text{вых}}(j\omega)$ будет равна $K(j\omega) \cdot S_{\text{вх}}(j\omega)$, а по спектральной плотности сигнала можно восстановить его вид в реальном времени, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье. В принципе, можно пытаться решить эту задачу аналитически, однако известно, что для практически интересных форм сигналов получить аналитическое решение не удаётся. Поэтому разумно воспользоваться вычислительной техникой. Подпрограммы, реализующие алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), содержатся в современных математических пакетах типа Mathcad (5.6.7.8) или Matlab.

В результате расчёта на выходе программы должен получиться массив чисел, представляющих собой отсчёты выходного сигнала через равные интервалы вре-

мени, причём $\Delta t = \frac{1}{2N\Delta f}$, где N - число разбиений полосы частот. Результаты этого расчёта также необходимо нанести на график, полученный при выполне-

нии п. 7 задания и сравнить с той формой выходного сигнала, которая была получена ранее. При сравнении следует иметь в виду, что изложенный здесь метод вычисления обратного преобразования Фурье с помощью численного алгоритма БПФ приближённый. Это понятно хотя бы из того факта, что отбрасывание части функций спектральной плотности для частот, при которых

$|S_{\text{ВЫХ}}(j\omega)| < 0,05 \cdot |S_{\text{ВЫХ}}(j\omega)|_{\text{max}}$, превышает сигнал с бесконечным спектром в сигнал с финитным спектром. Это неизбежная плата за использование дискретного численного алгоритма БПФ, однако, чем меньшая часть функции отбрасывается и чем чаще берутся отсчёты, тем точнее будет результат, полученный этим методом.

Выполнение п. 10 связано с использованием программы анализа линейных радиоэлектронных цепей в частотной области. Смысл выполнения этого пункта задания состоит в сопоставлении результатов расчетов с помощью простейшей модели ОУ с расчетами по более сложной модели с использованием ЭВМ.

Наконец, последний пункт задания курсовой работы ориентирован на то, что операционный усилитель – это реальный физический объект и его необходимо уметь правильно включить в радиоэлектронную цепь с тем, чтобы обеспечить её работоспособность и требуемые параметры. Величины напряжений питания, место его подключения, наличие, вид и место включения цепей коррекции зависят от типа ОУ и обычно приводятся в справочниках. Использование материалов справочника позволяет составить полную принципиальную схему (которая существенно отличается от схемы, использованной для расчёта) заданной радиоэлектронной цепи.

1.4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ И ПОРЯДКУ ЕЁ ЗАЩИТЫ

Курсовая работа представляет собой инженерную разработку радиотехнического устройства, которая содержит расчётный и графический разделы, которые должны быть выполнены согласно требованиям ЕСКД.

Работа может быть оформлена в рукописном или машинописном варианте с указаниями шифра, фамилии, имени и отчества студента.

Текст, формулы и расчётная часть пишутся чётко без исправлений и без пометок; на краях страницы должны быть поля (3 ÷ 4) см для замечаний и указаний рецензента.

В конце курсовой работы следует предусмотреть раздел для работы по устранению ошибок, выявленных в процессе рецензирования.

Выполненная работа представляется преподавателю для рецензирования, а затем после устранения отмеченных недоработок студент допускается к защите работы.

В ходе защиты студент должен знать принципы работы устройства, область

применения активного фильтра; уметь анализировать полученные результаты в зависимости от параметров схемы.

Студенты, использующие ДОТ, могут оформить курсовую работу на персональном компьютере и прикрепить на учебный сайт СЗТУ в системе MOODLE или выслать ее преподавателю для рецензирования на адрес электронной почты кафедры: radiotech@nwpi.ru.

4.4. Текущий контроль

Тренировочные тесты

Часть 1

Тест № 1

1. Дайте определение понятию информация:
 - a. Совокупность данных;
 - b. Библиотеки;
 - c. Всемирная компьютерная сеть;
 - d. Видео- и аудиотеки.

2. Сигналом называется:
 - a. Физический процесс, несущий в себе информацию;
 - b. Электрическое колебание;
 - c. Электромагнитное колебание;
 - d. Произвольное изменение напряжения во времени.

3. Спектр периодической последовательности импульсов является:
 - a. Непрерывным;
 - b. Дискретным;
 - c. Периодическим;
 - d. Экспоненциальным.

4. Спектр одиночного импульса является:
 - a. Дискретным;
 - b. Периодическим;
 - c. Непрерывным;
 - d. Экспоненциальным.

5. Корреляцией сигналов называется связь между:

- a. Сигналом и его спектром;
- b. Амплитудной и фазовой характеристиками сигнала;
- c. Сигналом и его копией, сдвинутой во времени на интервал τ ;
- d. Спектром сигнала и его копией, сдвинутой по частоте на интервал Δf .

Тест № 2

1. Модуляцией называется процесс:

- a. Суммирования низкочастотного информационного сигнала и высокочастотного несущего колебания;
- b. Изменения одного из параметров высокочастотного колебания под воздействием низкочастотного сигнала, отображающего передаваемое сообщение;
- c. Перемножения низкочастотного информационного сигнала и высокочастотного несущего колебания;
- d. Выделения модуля комплексного сигнала.

2. Амплитудной модуляцией называется процесс изменения амплитуды:

- a. Сигнала при изменении его фазы;
- b. Сигнала при изменении его частоты;
- c. Сигнала при его прохождении через линейный четырехполюсник;
- d. Высокочастотного несущего колебания по закону передаваемого сообщения.

3. Частотной модуляцией называется процесс изменения частоты:

- a. Сигнала при изменении его фазы;
- b. Сигнала при изменении его амплитуды;
- c. Высокочастотного несущего колебания по закону передаваемого сообщения;
- d. Сигнала при его прохождении через нелинейный четырехполюсник.

4. Фазовой модуляцией называется процесс изменения фазы:

- a. Сигнала при изменении его частоты;
- b. Сигнала при изменении его амплитуды;
- c. Высокочастотного несущего колебания по закону передаваемого сообщения;
- d. Сигнала при его прохождении через нелинейный четырехполюсник.

5. Спектр амплитудно-модулированного сигнала состоит из:

- a. Частоты несущего колебания и двух боковых полос;
- b. Частоты несущего колебания и одной боковой полосы;
- c. Частоты несущего колебания и кратных частот;
- d. Только из боковых полос.

Тест № 3

1. Случайным процессом называется:

- a. Любое случайное изменение некоторой физической величины во времени;
- b. Совокупность функций времени, подчиняющихся некоторой общей для них статистической закономерности;
- c. Совокупность случайных чисел, подчиняющихся некоторой общей для них статистической закономерности;
- d. Совокупность случайных функций времени.

2. Стационарность случайного процесса означает, что на протяжении всего отрезка времени:

- a. Математическое ожидание и дисперсия неизменны, а автокорреляционная функция зависит только от разности значений времени t_1 и t_2 ;
- b. Математическое ожидание и дисперсия неизменны, а автокорреляционная функция зависит только от моментов времени начала и конца процесса;
- c. Математическое ожидание неизменно, а дисперсия зависит только от разности значений времени t_1 и t_2 ;
- d. Дисперсия неизменна, а математическое ожидание зависит только от времени начала и конца процесса.

3. Эргодический процесс означает, что параметры случайного процесса можно определить по:

- a. Нескольким конечным реализациям;
- b. Одной конечной реализации;
- c. Одной бесконечной реализации;
- d. Нескольким бесконечным реализациям.

4. Спектральная плотность мощности эргодического процесса - это:

- a. Предел спектральной плотности усеченной реализации, деленной на время T ;
- b. Спектральная плотность конечной реализации длительностью T , деленная на время T ;
- c. Предел спектральной плотности усеченной реализации;

d. Спектральная плотность конечной реализации длительностью T .

5. Теорема Винера – Хинчина есть соотношение между:

- a. Энергетическим спектром и математическим ожиданием случайного процесса;
- b. Энергетическим спектром и дисперсией случайного процесса;
- c. Корреляционной функцией и дисперсией случайного процесса;
- d. Энергетическим спектром и корреляционной функцией случайного процесса.

Тест № 4

1. Для линейной цепи справедливы следующие утверждения:

a. Оператор линейной цепи не зависит от амплитуды входного воздействия.
Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе линейной цепи отсутствуют кратные гармоники;

b. Оператор линейной цепи зависит от амплитуды входного воздействия.
Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе линейной цепи отсутствуют кратные гармоники;

c. Оператор линейной цепи не зависит от амплитуды входного воздействия.
Линейная цепь не подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе линейной цепи отсутствуют кратные гармоники;

d. Оператор линейной цепи не зависит от амплитуды входного воздействия.
Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе линейной цепи присутствуют кратные гармоники.

2. Импульсная характеристика цепи $h(t)$ является выходным откликом на входной:

a. Прямоугольный импульс;

b. Треугольный импульс;

c. Единичный импульс;

d. Дельта-импульс.

3. Переходная характеристика цепи $a(t)$ является выходным откликом на входной:

a. Прямоугольный импульс;

b. Треугольный импульс;

c. Единичный импульс;

d. Дельта-импульс.

4. Передаточная характеристика цепи (комплексный частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$) является прямым преобразованием Фурье для:

- a. Импульсной характеристики цепи;
 - b. Переходной характеристики цепи;
 - c. Входного сигнала;
 - d. Выходного сигнала.
5. Амплитудно-частотной характеристикой цепи является зависимость:
- a. Модуля комплексного частотного коэффициента передачи от частоты;
 - b. Вещественной части комплексного частотного коэффициента передачи от частоты;
 - c. Модуля спектральной плотности входного сигнала от частоты;
 - d. Модуля спектральной плотности выходного сигнала от частоты.

Тест № 5

1. Если на входе линейной цепи действует случайный процесс с нормальным законом распределения, то на выходе получим случайный процесс, имеющий:
- a. Равномерный закон распределения;
 - b. Релеевский закон распределения;
 - c. Экспоненциальный закон распределения;
 - d. Нормальный закон распределения.
2. Спектральная плотность мощности на выходе линейной цепи равна произведению спектральной плотности мощности:
- a. Входного сигнала и квадрата передаточной частотной характеристики цепи;
 - b. Входного сигнала и передаточной частотной характеристики цепи;
 - c. Выходного сигнала и квадрата передаточной частотной характеристики цепи;
 - d. Выходного сигнала и передаточной частотной характеристики цепи.
3. Корреляционная функция на выходе линейной цепи равна:
- a. Свертке корреляционной функции на входе цепи и корреляционной функции импульсной характеристики цепи;
 - b. Произведению корреляционной функции на входе цепи и корреляционной функции импульсной характеристики цепи;
 - c. Свертке корреляционной функции на входе цепи и корреляционной функции переходной характеристики цепи;
 - d. Произведению корреляционной функции на входе цепи и корреляционной функции переходной характеристики цепи.

4. Энергетический спектр на выходе цепи равен прямому преобразованию Фурье:

- a. Корреляционной функции на выходе цепи;
- b. Корреляционной функции на входе цепи;
- c. Выходного сигнала;
- d. Импульсной функции.

5. Распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному тем больше, чем:

- a. Больше полоса пропускания цепи;
- b. Меньше полоса пропускания цепи;
- c. Полоса пропускания цепи не имеет значения;
- d. Уже сигнал на входе.

Тест № 6

1. Оптимальным фильтром называется фильтр, обеспечивающий:

- a. Наибольшее возможное отношение пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению шума;
- b. Наибольшее возможное отношение пикового значения сигнала к среднему значению шума;
- c. Наибольшее возможное пиковое значение сигнала;
- d. Наименьшее среднеквадратическое значение шума.

2. Амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра пропорциональна:

- a. Модулю спектральной плотности входного сигнала;
- b. Модулю спектральной плотности выходного сигнала;
- c. П-образной частотной характеристике приемного устройства;
- d. Энергетическому спектру шума.

3. Импульсная характеристика согласованного фильтра $g(t)$ определяется как:

- a. $g(t) = As(t_0 - t)$;
- b. $g(t) = As(t - t_0)$;
- c. $g(t) = As(t)$;
- d. $g(t) = As(-t)$.

4. Амплитудно-частотная характеристика реализуемого согласованного фильтра должна удовлетворять условию:

a. $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega < \infty$;

b. $\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) d\omega < \infty$;

c. $\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) d\omega > C$;

d. $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega > C$.

5. Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра (при белом шуме) зависит только от:

- a. Энергии сигнала и спектральной плотности шума $W_0 = \text{const}$;
- b. Мощности сигнала и спектральной плотности шума $W_0 = \text{const}$;
- c. Энергии сигнала и корреляционной функции шума $R_{\text{ввых}}(\tau)$;
- d. Мощности сигнала и корреляционной функции шума $R_{\text{ввых}}(\tau)$.

Часть 2

Тест № 7

1. Для нелинейной цепи справедливы следующие утверждения:

- a. Оператор нелинейной цепи не зависит от амплитуды входного воздействия. Нелинейная цепь подчиняется принципу суперпозиции. На выходе нелинейной цепи отсутствуют кратные гармоники;
- b. Оператор нелинейной цепи зависит от амплитуды входного воздействия. Нелинейная цепь подчиняется принципу суперпозиции. На выходе нелинейной цепи отсутствуют кратные гармоники;
- c. Оператор нелинейной цепи зависит от амплитуды входного воздействия. Нелинейная цепь не подчиняется принципу суперпозиции. На выходе нелинейной цепи присутствуют кратные гармоники;
- d. Оператор нелинейной цепи не зависит от амплитуды входного воздействия. Нелинейная цепь подчиняется принципу суперпозиции. На выходе нелинейной цепи присутствуют кратные гармоники.

2. Резистивный элемент называется пассивным, если график вольт-амперной характеристики (ВАХ) располагается:

- a. Только в первом и третьем квадрантах;
- b. Часть графика попадает во второй квадрант;
- c. Часть графика попадает в четвертый квадрант;
- d. Только во втором и четвертом квадрантах.

3. При подаче на вход нелинейного четырехполюсника одного гармонического колебания на выходе получаем:

- a. Гармоническое колебание той же частоты;
- b. Кратные частоты;
- c. Комбинационные частоты;
- d. Кратные и комбинационные частоты.

4. АМ-колебания получают путем:

- a. Нелинейного сложения сигнала модуляции $S(t)$ и несущего колебания без использования колебательного контура;
- b. Линейного сложения сигнала модуляции $S(t)$ и несущего колебания без использования колебательного контура;
- c. Нелинейного сложения сигнала модуляции $S(t)$ и несущего колебания с последующим применением колебательного контура;
- d. Линейного сложения сигнала модуляции $S(t)$ и несущего колебания с последующим применением колебательного контура.

5. Детектирование АМ-колебания получается с помощью безынерционного:

- a. Нелинейного четырехполюсника с последующей низкочастотной фильтрацией;
- b. Линейного четырехполюсника с последующей высокочастотной фильтрацией;
- c. Нелинейного четырехполюсника с последующей низкочастотной фильтрацией;
- d. Линейного четырехполюсника с последующей высокочастотной фильтрацией.

Тест № 8

1. Система становится неустойчивой, когда модуль петлевого коэффициента передачи:

- a. $\beta^* K \geq 1$, а его фаза $\varphi_\beta + \varphi_K = 2\pi n$;
- b. $\beta^* K \geq 1$, а его фаза $\varphi_\beta + \varphi_K = \pi(2n + 1)$;
- c. $\beta^* K < 1$, а его фаза $\varphi_\beta + \varphi_K = 2\pi n$;
- d. $\beta^* K < 1$, а его фаза $\varphi_\beta + \varphi_K = \pi(2n + 1)$.

2. Условием возникновения автоколебаний в LC-генераторе является:
- a. Положительность действительной части корней характеристического уравнения цепи;
 - b. Отрицательность действительной части корней характеристического уравнения цепи;
 - c. Положительность мнимой части корней характеристического уравнения цепи;
 - d. Отрицательность мнимой части корней характеристического уравнения цепи.
3. Мягким режимом возбуждения LC-генератора называется режим, при котором начальная точка является:
- a. Устойчивой, но существует пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению;
 - b. Неустойчивой и пороговое значение флуктуаций стремится к нулю;
 - c. Устойчивой при любом значении флуктуаций;
 - d. Неустойчивой, но существует еще пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению.
4. Жестким режимом возбуждения LC-генератора называется режим, при котором начальная точка является:
- a. Устойчивой, но существует пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению;
 - b. Неустойчивой и пороговое значение флуктуаций стремится к нулю;
 - c. Устойчивой при любом значении флуктуаций;
 - d. Неустойчивой, но существует еще пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению.
5. Критерий Найквиста. Четырехполюсник с обратной связью является устойчивым, если без обратной связи его амплитудно-фазовая характеристика (годограф):
- a. Охватывает точку с координатами $(1,0)$;
 - b. Не охватывает точку с координатами $(1,0)$;
 - c. Охватывает точку с координатами $(j,0)$;
 - d. Не охватывает точку с координатами $(j,0)$.

Тест № 9

1. Для линейной параметрической цепи справедливы следующие утверждения:
- a. Оператор цепи зависит от времени.
- Линейная параметрическая цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе параметрической цепи присутствуют дополнительные гармоники;

b. Оператор цепи зависит от времени.

Линейная параметрическая цепь не подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе параметрической цепи присутствуют дополнительные гармоники;

c. Оператор цепи не зависит от времени.

Линейная параметрическая цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе параметрической цепи присутствуют дополнительные гармоники;

d. Оператор цепи зависит от времени.

Линейная параметрическая цепь подчиняется принципу суперпозиции.

На выходе параметрической цепи отсутствуют дополнительные гармоники.

2. При изменении передаточной функции по любому сложному, но периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω_0 образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты:

a. $\omega_0 \pm m\Omega$, $m=0,1,2,\dots$;

b. $n\omega_0$, $n=0,1,2,\dots$;

c. $m\Omega$, $m=0,1,2,\dots$;

d. $n\omega_0 \pm m\Omega$, $n,m=0,1,2,\dots$

3. В цепях с реактивными параметрическими элементами при выполнении условия для амплитуды модуляции емкости $\Delta C / C_0 \geq \pi Q$, где Q – добротность контура, происходит параметрический резонанс при котором:

a. Энергия накачки преобразуется в энергию сигнала, и энергия сигнала возрастает;

b. Энергия сигнала преобразуется в энергию накачки, и энергия сигнала уменьшается;

c. Энергия накачки переходит в тепло, и энергия сигнала уменьшается;

d. Энергия сигнала не изменяется.

4. Уравнения закона сохранения энергии в параметрической цепи (уравнения Мэнли-Роу) определяют:

a. Законы распределения энергии сигнала накачки между гармониками выходного сигнала;

b. Условия возникновения параметрического резонанса;

c. Соотношения между комбинационными частотами выходного сигнала;

d. Коэффициент передачи параметрической цепи.

5. Двухконтурная схема “вырождается” в одноконтурную для:

a. Параметрического усилителя с преобразованием частоты “вверх”;

- b. Параметрического усилителя с преобразованием частоты “вниз”;
- c. Одиночного регенеративного усилителя;
- d. Не “вырождается” в одноконтурную схему.

Тест № 10

1. Спектр случайного узкополосного процесса на выходе безынерционного нелинейного элемента:

- a. Существенно отличается от спектра на входе и имеет 3 составляющие: первое слагаемое (дискретное) соответствует постоянной составляющей выходного колебания, второе – низкочастотной составляющей, спектр которой примыкает к нулевой частоте, третье – высокочастотной составляющей со спектром, группирующимся вблизи частоты $2\omega_0$;
- b. Несущественно отличается от спектра на входе и имеет 1 составляющую со спектром, группирующимся вблизи частоты $2\omega_0$;
- c. Несущественно отличается от спектра на входе и имеет 1 составляющую со спектром, группирующимся вблизи частоты ω_0 ;
- d. Существенно отличается от спектра на входе и имеет 2 составляющие: первое слагаемое (дискретное) соответствует постоянной составляющей выходного колебания, второе – низкочастотной составляющей, спектр которой примыкает к нулевой частоте.

2. Ширина выходного спектра при воздействии узкополосного шума на амплитудный линейный детектор:

- a. В 2 раза больше ширины входного спектра. Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания, независимо от особенностей структуры его спектра;
- b. В $\sqrt{2}$ раз больше ширины входного спектра. Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания в зависимости от особенностей структуры его спектра;
- c. В $\sqrt{2}$ раз меньше ширины входного спектра. Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания, независимо от особенностей структуры его спектра;
- d. В $\sqrt{2}$ раз больше ширины входного спектра. Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания, независимо от особенностей структуры его спектра.

3. При воздействии узкополосного шума на амплитудный линейный или квадратичный детектор спектры на выходах квадратичного и линейного детекторов:

- a. Различны по форме. Сам сигнал на выходе отличается от сигнала на входе только масштабом оси ординат;
- b. Одинаковы по форме, отличаются только масштабом оси ординат. Сам сигнал на выходе не отличается от сигнала на входе;
- c. Различны по форме. Сам сигнал на выходе отличается от сигнала на входе;
- d. Одинаковы по форме, отличаются только масштабом оси ординат. Сам сигнал на выходе отличается от сигнала на входе.

4. При совместном воздействии гармонического сигнала и гауссового шума на амплитудный детектор при слабом сигнале детекторы ведут себя:

- a. Одинаково: отношение сигнал/шум на выходе пропорционально квадрату отношения сигнал/шум на входе. При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе квадратичного детектора в 4 раза меньше, чем у линейного;
- b. Одинаково: отношение сигнал/шум на выходе пропорционально квадрату отношения сигнал/шум на входе. При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе квадратичного детектора в 4 раза больше, чем у линейного;
- c. Одинаково: отношение сигнал/шум на выходе пропорционально отношению сигнал/шум на входе. При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе квадратичного детектора в 4 раза меньше, чем у линейного;
- d. По-разному: отношение сигнал/шум на выходе линейного детектора пропорционально отношению сигнал/шум на входе, а квадратичного - квадрату отношения. При сильном сигнале отношение сигнал/шум на выходе квадратичного детектора в 4 раза меньше, чем у линейного.

5. При совместном воздействии гармонического сигнала и нормального шума на частотный детектор:

- a. Увеличением индекса угловой модуляции нельзя получить выигрыш в величине сигнал/шум в частотном детекторе по сравнению с величиной сигнал/шум в амплитудном детекторе;
- b. Увеличивая индекс угловой модуляции, можно получить большой выигрыш в величине сигнал/шум в частотном детекторе по сравнению с величиной сигнал/шум в амплитудном детекторе;
- c. Уменьшая индекс угловой модуляции, можно получить большой выигрыш в величине сигнал/шум в частотном детекторе по сравнению с величиной сигнал/шум в амплитудном детекторе;
- d. Увеличивая коэффициент модуляции, можно получить большой выигрыш в величине сигнал/шум в частотном детекторе по сравнению с величиной сигнал/шум в амплитудном детекторе.

Тест № 11

1. Цифровыми сигналами называют сигналы, которые:

- a. Дискретны не только во времени, но и квантованы по уровню;
- b. Дискретны во времени, но непрерывны по уровню;
- c. Квантованы по уровню, но непрерывны во времени;
- d. Непрерывны во времени и по уровню.

2. Спектр дискретного сигнала:

- a. Повторяется с периодом частоты дискретизации F_d ;
- b. Повторяется с периодом удвоенной частоты дискретизации $2F_d$;
- c. Повторяется с периодом T , не зависящим от частоты дискретизации F_d ;
- d. Не является периодическим.

3. Для дискретного сигнала $x(k)=x(t=k\Delta)$ справедливо Z -преобразование

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k},$$

которое вытекает из преобразования Фурье путем замены:

- a. $z=e^{-j\omega\Delta}$;
- b. $z=e^{j\omega\Delta}$;
- c. $z=j\omega\Delta$;
- d. $z=-j\omega\Delta$.

4. Комплексная передаточная характеристика цифрового фильтра

$$K_{\text{цф}}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)e^{-j2\pi fn\Delta}$$

является:

- a. Периодической функцией частоты дискретизации $F_d=1/\Delta$;
- b. Периодической функцией удвоенной частоты дискретизации $2F_d$;
- c. Периодической функцией с периодом T , не зависящим от частоты дискретизации F_d ;
- d. Не является периодической функцией.

5. Z -преобразование импульсной характеристики цифрового фильтра

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}$$

получается из комплексной передаточной характеристики цифрового фильтра путем замены:

- a. $z=e^{-j2\pi f\Delta}$;
- b. $z=e^{j2\pi f\Delta}$;
- c. $z=j2\pi f\Delta$;
- d. $z=-j2\pi f\Delta$.

Тест № 12

1. Передаточную функцию линейного четырехполюсника $K(p)$ можно представить в виде рациональной дроби – отношения двух полиномов с целыми степенями p и вещественными коэффициентами. Общими требованиями к $K(p)$ из условий устойчивости и физической реализуемости являются отсутствие полюсов в:

- a. Правой p -полуплоскости. Степень числителя n не должна превышать степень знаменателя m ;
- b.левой p -полуплоскости. Степень числителя n не должна превышать степень знаменателя m ;
- c. Правой p -полуплоскости. Степень числителя n должна превышать степень знаменателя m ;
- d.левой p -полуплоскости. Степень числителя n должна превышать степень знаменателя m .

2. Функцию, аппроксимирующую идеальную АЧХ фильтра нижних частот задают в виде $K(x) = \frac{1}{\sqrt{1+F^2(x)}}$, где $x = \frac{\omega}{\omega_c}$, а на $F(x)$ накладывают условия, что ее модуль:

- a. Минимален в полосе $0 < x \leq 1$ и максимален при $x > 1$;
- b. Максимален в полосе $0 < x \leq 1$ и минимален при $x > 1$;
- c. Минимален в полосе $0 < x \leq 1$ и минимален при $x > 1$;
- d. Максимален в полосе $0 < x \leq 1$ и максимален при $x > 1$.

3. Для фильтра Баттерворта второго порядка:

- a. $F(x)=x^2$ и $K(p) = a_0 \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$;
- b. $F(x)=\varepsilon * 2x^2$ и $K(p) = \frac{b_2}{p^2 + 0,645p + 0,708}$;
- c. $F(x)=x^2$ и $K(p) = \frac{b_2}{p^2 + 0,645p + 0,708}$;

d. $F(x)=\varepsilon*2x^2$ и $K(p) = a_0 \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$.

4. Для фильтра Чебышева второго порядка:

a. $F(x)=x^2$ и $K(p) = a_0 \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$;

b. $F(x)=\varepsilon*2x^2$ и $K(p) = \frac{b_2}{p^2 + 0,645p + 0,708}$;

c. $F(x)=x^2$ и $K(p) = \frac{b_2}{p^2 + 0,645p + 0,708}$;

d. $F(x)=\varepsilon*2x^2$ и $K(p) = a_0 \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$.

5. Линейные стационарные цифровые фильтры реализуются:

a. С конечной импульсной характеристикой - трансверсальной схемой, а с неограниченной импульсной характеристикой – рекурсивной схемой (с обратной связью с выхода на вход);

b. С неограниченной импульсной характеристикой - трансверсальной схемой, а с конечной импульсной характеристикой – рекурсивной схемой (с обратной связью с выхода на вход);

c. И трансверсальные, и рекурсивные схемы характеризуются конечной импульсной характеристикой;

d. И трансверсальные, и рекурсивные схемы характеризуются неограниченной импульсной характеристикой.

ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ НА ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

№ теста	Раздел	Номера вопросов / Правильные ответы					
		Номер вопроса	1	2	3	4	5
1	Раздел 1	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
2	Раздел 2	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
3	Раздел 3	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>
4	Раздел 4	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
5	Раздел 5	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
6	Раздел 6	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
7	Раздел 7	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
8	Раздел 8	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
9	Раздел 9	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
10	Раздел 10	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
11	Раздел 11	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
12	Раздел 12	Номер вопроса	1	2	3	4	5
		Правильный ответ	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

4.5. Итоговый контроль

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ»

Часть 1

1. Гармонический анализ периодических сигналов. Вещественная и комплексная формы ряда Фурье.
2. Гармонический анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье.
3. Основные свойства преобразования Фурье.
4. Спектры некоторых неинтегрируемых сигналов.
5. Корреляционные функции детерминированных сигналов и их основные свойства.
6. Связь между корреляционными функциями детерминированных сигналов и соответствующими спектрами
7. Амплитудная модуляция. Спектр и векторная диаграмма радиосигнала с гармонической АМ.
8. Многотональная амплитудная модуляция. Спектр радиосигнала в общем случае АМ.
9. Угловая модуляция. Полная фаза и мгновенная частота радиосигнала. Гармоническая фазовая и частотная модуляции.
10. Спектр радиосигнала при гармонической угловой модуляции.
11. Комплексная огибающая радиосигнала. Взаимная корреляционная функция модулированных сигналов (метод комплексной огибающей).
12. Преобразование Гильберта и аналитический сигнал.
13. Случайный процесс как ансамбль реализаций. Одномерная плотность вероятности и связанные с ней статистические характеристики случайного процесса.
14. Двух- и многомерная плотности вероятности. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса.
15. Стационарный и эргодический случайные процессы. Нормальный случайный процесс.
16. Спектральная характеристика случайного процесса.
17. Теорема Винера—Хинчина. Белый шум.
18. Частотные и временные характеристики линейных цепей. Методы анализа прохождения детерминированных сигналов.
19. Преобразование характеристик случайного процесса в линейной цепи.
20. RC-фильтры нижних и верхних частот. Частотные и временные характеристики.
21. Одиночный колебательный контур и его основные характеристики.
22. Комплексный коэффициент передачи линейной цепи с обратной связью. Виды обратной связи.

23. Применение отрицательной обратной связи для улучшения характеристик усилителя.
24. Условия устойчивости линейной цепи.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ»

Часть 2

1. Постановка задачи о согласованной фильтрации детерминированного сигнала. Коэффициент передачи и импульсная характеристика согласованного фильтра.
2. Выходной сигнал согласованного фильтра. Отношение сигнал/шум на входе и выходе согласованного фильтра.
3. Повышение разрешения по дальности в локационных системах. Сложные сигналы.
4. Скрытная передача сигналов. Коррелятор.
5. Согласованная фильтрация сигналов при небелом шуме.
6. Оптимальная фильтрация случайного сигнала.
7. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье.
8. Теорема Котельникова.
9. Спектр дискретизированного сигнала.
10. Структурная схема системы цифровой фильтрации сигналов. Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов.
11. Алгоритм дискретной фильтрации. Метод Z -преобразования.
12. Системная функция и частотная характеристика дискретного фильтра.
13. Формы реализации дискретных фильтров.
14. Синтез дискретных фильтров методом билинейного Z -преобразования.
15. Дискретизация сигналов в частотной области. Дискретное преобразование Фурье.
16. Нелинейные элементы. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.
17. Общая схема нелинейного преобразования радиосигналов. Бигармоническое воздействие на нелинейный элемент.
18. Формирование радиосигнала с амплитудной модуляцией, преобразование частоты, квадратичное амплитудное детектирование.
19. Линейное детектирование радиосигналов с амплитудной модуляцией. Диодный детектор.
20. Стационарный режим работы автогенератора гармонических колебаний. Баланс фаз и баланс амплитуд.
21. LC -автогенератор с трансформаторной обратной связью.
22. Трехточечные схемы LC -автогенераторов.
23. RC -автогенераторы.
24. Преобразование случайных сигналов в безынерционных нелинейных цепях.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Информация о дисциплине	3
1.1. Предисловие	3
1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы	4
1.2.1. Содержание дисциплины по ГОС	4
1.2.2. Объем дисциплины и виды учебной работы	4
1.2.3. Перечень видов практических занятий и контроля	5
2. Рабочие учебные материалы	5
2.1. Рабочая программа	5
2.2. Тематический план дисциплины	12
2.2.1. Тематический план дисциплины для студентов очно-заочной формы обучения	12
2.2.2. Тематический план дисциплины для студентов заочной формы обучения	15
2.3. Структурно-логическая схема дисциплины	19
2.4. Временной график изучения дисциплины	20
2.5. Практический блок	20
2.5.1. Практические занятия	20
2.5.1.1. Практические занятия (очно-заочная форма обучения)	20
2.5.1.2. Практические занятия (заочная форма обучения)	21
2.5.2. Лабораторные работы	22
2.5.2.1. Лабораторные работы (очно-заочная форма обучения)	22
2.5.2.2. Лабораторные работы (заочная форма обучения)	23
2.6. Балльно-рейтинговая система оценки знаний	24
3. Информационные ресурсы дисциплины	25
3.1. Библиографический список	25
3.2. Опорный конспект	26
Введение	26
1. Детерминированные радиотехнические сигналы	28
1.1. Элементы обобщенной теории сигналов	28
1.2. Спектральные характеристики сигналов	31
1.3. Дискретизация сигналов. Теорема отсчетов	47
1.4. Корреляционные характеристики сигналов	51
2. Модулированные сигналы	54
2.1. Временное и спектральное представления сигналов с амплитудной модуляцией	54
2.2. Временное и спектральное представления сигналов с угловой модуляцией	64
2.3. Разновидности модулированных сигналов	70
3. Случайные сигналы	84
3.1. Вероятностные характеристики случайных сигналов	84
3.2. Корреляционный и спектральный анализы случайных сигналов	87
4. Линейные цепи	88
4.1. Частотные и временные характеристики линейных цепей	88

4.2. Методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи	90
5. Преобразования характеристик случайного сигнала в линейной цепи	93
5.1. Спектральная характеристика мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи	93
5.2. Нормирование случайных процессов в узкополосных линейных цепях	96
6. Аналоговая фильтрация сигналов	97
6.1. Согласованная фильтрация детерминированного сигнала	98
6.2. Оптимальная фильтрация случайного сигнала	100
7. Нелинейные цепи	102
7.1. Преобразования радиосигналов в нелинейных цепях	102
7.2. Формирование и демодуляция радиосигналов. Преобразование частоты	109
8. Принципы работы автогенераторов гармонических колебаний	121
8.1. Автоколебательная система	121
8.2. Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний	123
8.3. Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации	126
9. Параметрические цепи	133
9.1. Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи	134
9.2. Параметрический резонанс	139
10. Воздействия случайных колебаний на нелинейные и параметрические цепи	144
10.1. Преобразование нормального процесса в безынерционных нелинейных цепях	144
10.2. Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный и частотный детекторы	148
11. Дискретная фильтрация сигналов	153
11.1. Характеристики и формы реализации дискретных фильтров	153
11.2. Использование дискретного преобразования Фурье и метода Z-преобразования в анализе дискретных фильтров	158
12. Основы синтеза аналоговых и дискретных фильтров	170
3.3. Глоссарий (краткий словарь терминов)	175
3.4. Технические и программные средства обеспечения дисциплины	176
3.4.1. Описание компьютерных программ по разделам дисциплины	176
3.4.2. Описание автоматизированной обучающей программы	176
3.5. Методические указания к выполнению лабораторных работ	176
3.6. Методические указания к проведению практических занятий	176
4. Блок контроля освоения дисциплины	176
4.1. Общие указания	176

4.2. Задание на контрольную работу и методические указания к ее выполнению	177
4.3. Задание на курсовую работу и методические указания к ее выполнению	187
4.4 Текущий контроль	203
4.5 Итоговый контроль	219

Малинин Сергей Иванович

Токарев Владимир Семенович

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Редактор И.Н. Садчикова
Сводный темплан 2010 г.
ЛР № 020308 от 14.02.97

Подписано в печать
Б.кн. – журн. П.л.

Бл.

Формат 60x84 1/1
Изд-во СЗТУ

Тираж

Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет
Издательство СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации
университетов России
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, д. 5